Mathematik Vorkurs

Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Sven Jarohs

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen

Dieses Kurzskript richtet sich an Mathematikinteressierte, die noch wenig bis gar keinen Einblick in die höhere Mathematik hatten. Wir werden die Mathematik auf einem *logischen* Grundgerüst aufbauen, das aus einem Axiomensystem und gewissen Regeln, wie diese Axiome agieren dürfen, besteht. Dazu kommt, dass wir in der Mathematik typischerweise eher übersichtlich sind und versuchen alles kurz und knapp zu schreiben. Deshalb werden wir einige Symbole kennenlernen, die wir wie Vokabeln einer Fremdsprache lernen müssen, um die Sprache der Mathematik lesen und verstehen zu können.

2 Grundlegende Begriffe und Regeln der Logik

Bevor wir mathematische Aussagen formulieren und diese später auf ihre Gültigkeit überprüfen können, müssen wir uns zunächst auf ein *System* einigen, wann etwas für gültig empfunden wird und wann etwas falsch ist. Welches System wir hierfür zu Grunde legen, hängt davon ab, was wir erreichen wollen. Diese grundlegenden Regeln nennen wir **Axiome**. Wir werden ein *sinnvolles* System später ansprechen, aber zunächst sei unser Axiomensystem eines, das uns jeden Tag begegnet, d.h. es soll solche Regeln wie

Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands.

oder

Katzen haben 2 Ohren.

geben. In der Mathematik versteht man unter einer *Aussage* ein sprachliches Gebilde, welches einen Sachverhalt beschreibt. Dieses darf nur entweder "wahr" oder "falsch" und nicht beides gleichzeitig sein.

Beispiel 2.1.

1. "2 ist eine gerade Zahl." ist eine Aussage. Sie ist wahr (nach unserem Verständnis).
2. "Diese Aussage ist nicht wahr." ist keine Aussage, da sie weder wahr noch falsch ist.

Bemerkung 2.2. Ist A eine Aussage, die wahr (bzw. falsch) ist, so sagen wir im Folgenden auch es gilt A (bzw. es gilt nicht A).

Um nun zu überprüfen wie zwei Aussagen zueinander stehen, verwenden wir sogenannte Wahrheitstafeln. Der einfachste Zusammenhang besteht zwischen einer Aussage A und ihrer Verneinung:

Definition 2.3. Es sei A eine Aussage, dann bezeichnen wir mit $\neg A$ die **negierte** Aussage A. Wir lesen $\neg A$ als "nicht A". A und $\neg A$ stehen im Verhältnis:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Beide Aussagen schließen sich gegenseitig aus, d.h. A und $\neg A$ gelten niemals gleichzeitig. Hiermit kommen wir direkt zu unserer nächsten Definition:

Definition 2.4. Es bezeichne $(A \wedge B)$ die Konjunktion zwischen zwei Aussagen A und B. Wir lesen $(A \wedge B)$ als "A und B". Sie ist gegeben durch die Wahrheitstafel:

A	B	$(A \wedge B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beachte: Nur wenn A und B beide gleichzeitig gelten, d.h. beide sind wahr, gilt $(A \wedge B)$.

Beispiel 2.5.

1. Die Aussage ("Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands."$\wedge$ "Katzen haben zwei Ohren.") ist wahr.
2. Die Aussage ("Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands."$\wedge$" Die Tafel ist blau.") ist falsch.

Wir können nun unsere erste allgemeine Aussage treffen.

Satz 2.6. *Sei A eine Aussage. Dann ist $(A \wedge \neg A)$ falsch.*

Beweis. Wir betrachten die Wahrheitstafel von A und $\neg A$:

A	$\neg A$	$(A \wedge \neg A)$
w	f	f
f	w	f

$\square$

Als *Abschwächung* zum Und verwenden wir das (inklusive) Oder, d.h. wir untersuchen, ob A oder B wahr ist.

Definition 2.7. Es bezeichne $(A \vee B)$ die Disjunktion zwischen zwei Aussagen A und B. Wir lesen $(A \vee B)$ als "A oder B". Sie ist gegeben durch die Wahrheitstafel:

A	B	$(A \vee B)$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beachte: Das Oder in $A \vee B$ ist ein inklusives Oder, welches ein Und einschließt.

Beispiel 2.8.

1. Die Aussage ("2 ist gerade." $\vee$ "Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands.") ist wahr.

2. Die Aussage ("Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands." $\vee$ "Die Tafel ist blau.") ist wahr.

3. Die Aussage ("Frankfurt ist die Hauptstadt Deutschlands." $\vee$ "Die Tafel ist blau.") ist falsch.

Bemerkung 2.9. Man kann ein "entweder ... oder ... " (welches das Und ausschließt) nun mit Hilfe der Zeichen $\vee$ und $\wedge$ als

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

definieren. Überlegen Sie sich alternative, gleichbedeutende Definitionsmöglichkeiten.

Satz 2.10. *Sei A eine Aussage. Dann gilt $(A \vee \neg A)$ ist wahr. Wir nennen $(A \vee \neg A)$ eine* ***Tautologie****.*

Beweis. Es gilt folgende Tafel:

A	$\neg A$	$(A \vee \neg A)$
w	f	w
f	w	w

□

Eine weitere Bemerkung zur Wahrheitstafel der Disjunktion ist folgende Aussage: Nur wenn A und B beide nicht wahr sind, dann ist $(A \vee B)$ falsch. Bevor wir diesen Zusammenhang mathematisch richtig formulieren können, benötigen wir noch eine Wahrheitstafel für den Sachverhalt, dass aus einer Aussage A eine Aussage B folgt.

Definition 2.11. Eine Aussage A **impliziert** eine Aussage B, in Zeichen $A \Rightarrow B$, wenn gilt:

Immer dann, wenn A wahr ist, so ist auch B wahr.

Wir lesen $A \Rightarrow B$ als "A impliziert B" oder "aus A folgt B" oder "gilt A, dann gilt auch B".

Wir beobachten, es gilt dann folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wichtig in dieser Festlegung ist, dass wenn A nicht gilt, so ist $A \Rightarrow B$ immer richtig, d.h. aus einer falschen Aussage kann wahrheitsgemäß alles gefolgert werden. Formal wird $A \Rightarrow B$ auch als $\neg A \vee B$ definiert. Bemerke, das "Wenn..., dann..." sagt nichts über den kausalen Zusammenhang der beiden Aussagen aus.

Beispiel 2.12. 1. Die Aussage ("Die Sonne scheint." $\Rightarrow$ "2 ist eine Gerade Zahl.") ist wahr.

2. Die Aussage ("Katzen haben 5 Ohren." $\Rightarrow$ "2 ist eine Gerade Zahl.") ist wahr.

3. Die Aussage ("Draußen regnet es." $\Rightarrow$ "Es sind Wolken am Himmel.") ist wahr.

4. Die Aussage ("Es sind Wolken am Himmel. " $\Rightarrow$ "Draußen regnet es.") ist im Allgemeinen nicht wahr.

Noch stärker als die Implikation ist die Äquivalenz zweier Aussagen.

Definition 2.13. Zwei Aussagen A und B heißen **äquivalent** (oder **gleichbedeutend**), wenn $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ gilt, d.h. A und B haben den gleichen Wahrheitswert. Wir schreiben kurz $A \Leftrightarrow B$.

Wir beobachten, es gilt dann folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Satz 2.14. *Seien A und B Aussagen. Dann gilt* $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

Beweis. Beachte, es sind zwei Richtungen zu zeigen: $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (genannt die *Hin-Richtung*) und $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$ (genannt die *Rück-Richtung*). Für die Hin-Richtung betrachten wir folgende Wahrheitstafel:

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \wedge \neg B)$	$\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
w	f	w	f	f	f	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	f	f	w
f	w	f	w	w	w	w

Die Rück-Richtung ist eine Übungsaufgabe. □

Lemma 2.15. *Seien A und B Aussagen. Dann gilt:*

1. $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ *(Doppelnegationsregel).*

2. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *(Kontrapositionsregel).*

3. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ *(Widerspruchsregel).*

Beweis. Übung! □

3 Beweistechniken

Die meisten in der Mathematik zu beweisenden Aussagen sind von der Form $A \Rightarrow B$ und werden bezeichnet als

Satz/Theorem	wichtige, grundlegende Aussagen
Proposition	wichtige Aussagen
Lemma	Hilfsaussagen, Rechenregeln oder “Sätzchen”
Korollar	Folgerung aus einer vorherigen Aussagen

In einer Aussage $A \Rightarrow B$ wird zumeist A als Voraussetzung und B als Behauptung bezeichnet. Wir haben nun gesehen, dass wir mit Hilfe von Wahrheitstafeln solche Aussagen beweisen können. Grundlegend unterscheiden wir drei Arten von Beweisen um zu zeigen, dass aus einer Voraussetzung A eine Behauptung B folgt, d.h. $A \Rightarrow B$.

1. Der direkte Beweis: Bei einem direkten Beweis gilt es die Aussage A mit endlich vielen Schritten so in Aussagen $A_1, \dots, A_n$ umzuformen, dass eine *Implikationskette* der Form

   $$A \;\Rightarrow\; A_1 \;\Rightarrow\; \dots \;\Rightarrow\; A_i \;\Rightarrow\; \dots \;\Rightarrow\; A_n \;\Rightarrow\; B$$

   entsteht. Hierbei soll dann jeder Zwischenschritt *offensichtlich* wahr sein. Typischerweise wird eine solche Implikationskette so geformt, dass wir zunächst voraussetzen, dass A gilt und dann mit Hilfe von Axiomen und bereits gezeigte Aussagen die Aussage B herleiten.

2. Der Beweis durch Kontraposition (auch indirekter Beweis genannt): Wir verwenden die Kontrapositionsregel, die besagt, dass $(A \Rightarrow B)$ gleichbedeutend ist mit $(\neg B \Rightarrow \neg A)$. Ziel im Kontrapositionsbeweis ist es dann die Aussage $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ direkt zu zeigen. Das heißt, wir gehen in diesem Fall davon aus, dass B nicht gilt und wollen zeigen, dass dann auch A nicht gilt analog zum direkten Beweis.

3. Widerspruchsbeweis: Wir verwenden die Widerspruchsregel, dass heißt, wir nehmen an, dass A wahr ist, aber gleichzeitig B nicht wahr ist. Wir müssen dann zeigen, dass in jedem Fall $A \wedge \neg B$ nicht gilt, das heißt wir müssen die Aussage $A \wedge \neg B$ zu einem Widerspruch führen. Hierbei ist es im Allgemeinen nicht klar, wo dieser Widerspruch entstehen könnte; der Widerspruch könnte entstehen zu einer bisher gezeigten Aussage oder aber zu unserem Axiomensystem. Beachte auch, dass wenn $\neg A \wedge B$ wahr ist, dann kann über den Wahrheitswert von $A \Rightarrow B$ im Allgemeinen nichts ausgesagt werden.

Abhängig von der Situation lässt sich einer der drei Wege benutzen um eine Aussage zu zeigen. z.B. für die Aussage “Es regnet.”$\Rightarrow$“Wolken sind am Himmel.” passen folgende Aussagen:

1. Da es regnet, sind Wolken am Himmel.

2. Da keine Wolken am Himmel sind, regnet es nicht.

3. Angenommen es regnet und gleichzeitig sind keine Wolken am Himmel, dann passt das nicht in unsere Vorstellung. Wir haben also einen Widerspruch.

Beispiel 3.1. Als Beispiel betrachten wir nun erneut die Hin-Richtung von Satz 2.14, d.h. wir betrachten dieBehauptung: Für alle Aussagen A,B gilt $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

1. *Beweis.* (direkter Beweis) Es seien A,B zwei Aussagen. Ist $\neg(A \vee B)$ wahr, so ist $A \vee B$ eine falsche Aussage und nach Definition von $\vee$ sind damit A und B falsche Aussagen. Folglich sind $\neg A$ und $\neg B$ wahre Aussagen und damit gilt $(\neg A \wedge \neg B)$. Es folgt nun die Behauptung (denn wäre $\neg(A \vee B)$ falsch, so ist nichts zu zeigen). □

2. *Beweis.* (indirekter Beweis) Es seien A,B zwei Aussagen. Wir zeigen $\neg(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg\neg(A \vee B)$. Beachte, nach Lemma 2.15.1 gilt für alle Aussagen $C \Leftrightarrow \neg\neg C$. Folglich genügt es zu zeigen, dass $\neg(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow (A \vee B)$ gilt. Sei nun $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ wahr, dann ist $\neg A \wedge \neg B$ eine falsche Aussage. Nach Definition ist folglich $\neg A$ oder $\neg B$ falsch. Also muss A oder B gelten, d.h. es gilt $A \vee B$. □

3. *Beweis.* (Widerspruchsbeweis) Es seien A,B zwei Aussagen. Angenommen $\neg(A \vee B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B)$ ist wahr. Dann sind sowohl $\neg(A \vee B)$ als auch $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ wahr. Also sind $A \vee B$ und $\neg A \wedge \neg B$ falsch. Da $A \vee B$ nur falsch sein kann, wenn A und B nicht gelten, folgt, dass $\neg A \wedge \neg B$ wahr ist. Demnach muss $\neg A \wedge \neg B$ gleichzeitig wahr und falsch sein, dies ist aber ein Widerspruch zu Satz 2.6. Also ist unsere Annahme falsch gewesen, d.h. es ist $\neg(A \vee B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B)$ eine falsche Aussage, also ist $\neg(\neg(A \vee B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B))$ eine wahre Ausssage und diese ist nach Lemma 2.15.3 äquivalent zu $A \Rightarrow B$. □

Bemerkung 3.2. Alle Aussagen, die mit Hilfe einer Wahrheitstafel geführt sind, lassen sich auch mit Hilfe eines direkten, indirekten oder Widerspruchs-Beweis führen.

4 Einführung in die Mengenlehre

Im vorherigen Abschnitt haben wir ein paar logische Grundprinzipien kennengelernt, auf denen wir unsere Mathematik aufbauen. Bisher haben wir uns jedoch noch nicht auf ein *sinnvolles* Axiomensystem festgelegt. Anders als in vielen anderen Bereichen verlangen wir von der Mathematik, dass sie aufgebaut werden soll auf einem System, das beständig ist. Eine Aussage wie “Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands” ist demnach nicht sinnvoll, da wir nicht vorhersagen können, ob diese Aussage immer gelten wird. Wir verlangen von einem Axiomensystem, dass dann grundlegend immer gelten soll:

- Es gibt keine Widersprüche in sich.
- Kein Axiom folgt aus den anderen.

In diesem Kurs werden wir vor allem verschiedene Mengen untersuchen. Unter einer *Menge* verstehen wir eine Ansammlung von Objekte. Wir schreiben $\{a,b,c,\ldots\}$ für eine Menge, wobei a,b und c irgendwelche Objekte sind. Ist a ein Objekt, das in einer Menge M aufgelistet ist, so bezeichnen wir a als ein *Element* der Menge M und schreiben $a \in M$. Andernfalls schreiben wir $a \notin M$.

Für die Mengenlehre hat sich Anfang des 20. Jahrhunderts ein bestimmtes Axiomensystem eingebürgert und wird als Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre bezeichnet.[1] Es setzt die nötigen Eigenschaften, die wir brauchen,

[1] Genauer beschäftigen wir uns hier mit dem sogenannten *weak ZF* System, wobei ZF für “Zermelo-Fraenkel” steht.

um mit Mengen umzugehen. Wir werden zudem in diesem Abschnitt einige Symbole kennenlernen, die in der Mathematik essentiell wichtig sind.

Definition 4.1. Es seien M,N zwei Mengen.

1. Wir sagen N ist **Teilmenge** von M, wenn für jedes $x \in N$ folgt, dass auch $x \in M$ gilt. Mit dem Symbol $:\Leftrightarrow$ definieren wir eine neue Aussage. Das Symbol für „Teilmenge“ ist definiert durch
$$N \subset M \ :\Leftrightarrow \ [x \in N \Rightarrow x \in M].$$
2. Wir sagen N und M sind *gleich*, wenn sowohl $N \subset M$ als auch $M \subset N$ gilt, d.h.
$$N = M \ :\Leftrightarrow \ [N \subset M \ \wedge \ M \subset N].$$

Die Gleichheit von Mengen wird in der Mengenlehre durch das **Extensionalitätsaxiom** gewährleistet. Analog zum $:\Leftrightarrow$, was eine Aussage definiert, verwenden wir auch das Symbol $:=$, was eine Menge definiert.

Bemerkung 4.2. Aufgrund der Definition von Gleichheit zweier Mengen folgt, dass wir Objekte, die in einer Menge aufgelistet sind, nicht mehrfach auflisten, es gilt also $\{a,a,a,a\dots\} = \{a\}$. Ferner ist auch die Reihenfolge der Auflistung egal, es gilt also $\{a,b\} = \{b,a\}$. Offensichtlich gilt auch
$$N = M \ \Leftrightarrow \ [x \in N \Rightarrow x \in M] \wedge [x \in M \Rightarrow x \in N].$$
Es ist üblich $N \supset M :\Leftrightarrow M \subset N$ für Mengen N,M und $[A \Leftarrow B] :\Leftrightarrow [B \Rightarrow A]$ für Aussagen A,B zu setzen. Ferner schreiben wir $M \neq N$, wenn M und N nicht gleich sind.

Definition 4.3. Es sei M eine Menge.

1. Ist für jedes $x \in M$ eine Aussage $E(x)$ gegeben, so bezeichnen wir $E(\cdot)$ auch als Vorschrift (oder Prädikat) auf M.
2. Ist $E(\cdot)$ eine gegebene Vorschrift auf M, so existiert eine Menge $\{x \in M \ : \ E(x)\}$, die diejenigen $x \in M$ enthält, für die $E(x)$ wahr ist. Ist die Aussage $E(y)$ wahr für ein $y \in M$, so schreiben wir insbesondere $y \in \{x \in M \ : \ E(x)\}$ und andernfalls schreiben wir $y \notin \{x \in M \ : \ E(x)\}$.

Die Existenz dieser Mengen liefert das **Aussonderungsaxiom**. Die Menge M wird auch als *Grundmenge* für E bezeichnet.

Beispiel 4.4. Das folgende Beispiel entstammt nicht der Mengenlehre, da in dieser nur Mengen existieren. Zur Veranschaulichung können wir nun aber als Grundmenge M die Menge aller endlichen Ziffern- und Buchstabenfolgen wählen.

1. $E(x) :\Leftrightarrow$“x ist Säugetier”. Dann ist (Elefant) $\in \{x \ : \ E(x)\}$ und (Forelle)$\notin \{x \ : \ E(x)\}$.
2. $E(x) :\Leftrightarrow$“x ist gerade Zahl”. Dann ist $\{x : E(x)\} = \{x : \ x \text{ ist gerade}\} = \{\dots,-2,0,2,4,\dots\}$ die Menge der geraden Zahlen.

Bemerkung 4.5. Sei M eine Menge und $E(\cdot)$ eine Vorschrift auf M. Die Menge $\{x \in M \,:\, E(x)\}$ ist nach der Definition (bzw. nach dem Extensionalitätsaxiom) eindeutig bestimmt und offensichtlich gilt stets $\{x \in M \,:\, E(x)\} \subset M$.

Da innerhalb einer Menge, die Reihenfolge der aufgelisteten Objekte nicht festgelegt ist, in der Mathematik es aber oftmals auf die Reihenfolge ankommt, verwenden wir als *Hilfsmittel* daher die*Tupel*-Schreibweise und das kartesische Produkt.

Definition 4.6 (Kartesisches Produkt)**.** Sind N,M Mengen, so setzen wir

$$M \times N := \{(m,n) \,:\, m \in M,\ n \in N\}$$

und bezeichnen diese Menge als das **kartesische Produkt zwischen** M **und** N. Elemente von $M \times N$ heißen auch **Tupel**. Sind $(a,b),(c,d) \in M \times N$, so gilt

$$(a,b) = (c,d) \;:\Leftrightarrow\; a = c \wedge b = d \quad \text{sowie, für Mengen } A,B, \quad A \times B \subset M \times N \;:\Leftrightarrow\; A \subset M \wedge B \subset N.$$

Wichtig: Ist $M = \{1,2\}$ so gilt auch in $M \times M$, dass $(1,2) \neq (2,1)$ ist!

Wir zuvor bemerkt, basiert die Mengenlehre ausschließlich auf Mengen und wir können keine anderen Objekte verwenden. Da aber auch alle bisherigen Definitionen voraussetzen, dass wir eine Menge vorliegen haben, müssen wir axiomatisch verlangen, dass es mindestens eine Menge gibt.

Satz und Definition 4.7 (Leermengenaxiom)**.** *Es gibt eine Menge, die keine Elemente enthält. Diese Menge ist eindeutig bestimmt und heißt* ***Leere Menge****. Ihr Symbol ist gegeben durch* $\emptyset$.

Um die Existenz der leeren Menge formal zu definieren benötigen wir sogenannte Quantoren, die quantitative Aussagen zulassen. In der Mathematik verwenden wir die folgenden Quantoren:

Quantor	Bedeutung
$\forall$	für alle
$\exists$	es existiert (mindestens) ein
$\exists!$	es existiert genau ein

Die formal Definition der Existenz der leeren Menge ist dann gegeben durch:

In Zeichen: $\exists \emptyset \,:\, [\forall x \,:\, x \notin \emptyset]$

In Worten: Es gibt $\emptyset$ mit der Eigenschaft, dass für alle x gilt, dass x kein Element von $\emptyset$ ist.

Beweis von Satz 4.7. Angenommen es gäbe eine weitere Menge A mit der Eigenschaft, dass $\forall x : x \notin A$ gilt. Dann ist sowohl $(x \in A) \Rightarrow (x \in \emptyset)$ wahr, als auch $(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in A)$, da $x \in A$ als auch $x \in \emptyset$ nie erfüllt sein können. Es folgt also nach dem Extensionalitätsaxiom $A = \emptyset$. □

Bemerkung 4.8. Aus dem Beweis von Satz 4.7 folgt indirekt auch, dass

In Zeichen: $\forall X \,:\, \emptyset \subset X$ In Worten: Für alle X ist $\emptyset$ eine Teilmenge von X

gilt. Im folgenden heißt eine Menge M nichtleer, wenn $M \neq \emptyset$ gilt.

Definition 4.9 (Paarmengenaxiom)**.** Sind M,N gegeben, so existiert genau eine Menge X mit den Elementen M und N. Wir schreiben $X = \{M,N\}$ und, falls $M = N$, so schreiben wir $X = \{M\}$.

Analog zu der Definition der Leeren Mengen, können wir die Existenz der Menge X zu M und N schreiben als

In Zeichen:	$\forall M,N\ \exists X\ :\ \forall Y\ :\ [Y \in X\ \Leftrightarrow\ [Y = M\ \vee\ Y = N]]$
In Worten:	Für alle M,N existiert ein X mit der Eigenschaft, dass für alle Y gilt, dass Y ein Element von X ist, wenn $Y = M$ oder $Y = N$ ist.

Da in diesem Aufbau auch M und N wieder Mengen sind, ist folglich $X = \{M,N\}$ eine Menge von Mengen. Ebenso kann nun auch M eine Menge von Mengen sein und so weiter. Es folgt, dass das Paarmengenaxiom also eine (Mengen-)Klammer „hinzufügt" und wir somit auf eine höhere Stufe kommen.

Beispiel 4.10. Die Menge $\emptyset$ hat keine Elemente, aber die Menge $\{\emptyset\}$ hat ein Element, nämlich die Leere Menge. Die Menge $\{\{\emptyset\},\emptyset\}$ hat sogar zwei Elemente. Insbesondere ist $\{\emptyset\} \neq \emptyset$!

Die Basis für die Unterscheidung zwischen diesen Stufen liefert das **Fundierungsaxiom**, welches besagt, dass zu jeder nichtleeren Menge M ein Elemente $X \in M$ existiert mit der Eigenschaft, dass X und M disjunkt sind. Hierbei sagen wir, dass zwei Mengen X,M genau dann disjunkt sind, wenn $x \in X \Rightarrow x \notin M$ gilt. In diesem Fall haben X und M keine gemeinsamen Elemente. Formal lässt sich das Fundierungsaxiom also schreiben als

$$\forall M\ :\ M \neq \emptyset\ \Rightarrow\ \exists X \in M\ :\ [x \in X \Rightarrow x \notin M].$$

Beispiel 4.11. Sei $M = \{\{a,b\},\{c\},a,b\}$. Dann erfüllt $X = \{c\}$ die gesuchten Bedingungen, da c das einzige Element von X ist und nicht in M aufgelistet ist.

Als Gegenstück zum Paarmengenaxiom, welches eine *Stufe* hinzufügt, bietet das **Vereinigungsaxiom** die Möglichkeit eine Stufe *wegzunehmen*. Das Vereinigungsaxiom besagt, dass für jede Menge M es genau eine Menge N gibt, die genau die Elemente der Elemente von M als Elemente hat. Hierbei ist N eindeutig bestimmt und wird auch "Vereinigung der Elemente von M" genannt.

Beispiel 4.12. Seien zwei Mengen $\{a\}$ und $\{b,c\}$ gegeben. Dann existiert mit Hilfe des Paarmengenaxioms die Menge $M = \{\{a\},\{b,c\}\}$. Die Menge N, die nach dem Vereiningungsaxiom existiert, ist dann gegeben durch $N = \{a,b,c\}$.

Auf Basis der bisherigen Axiome definieren wir:

Definition 4.13. Es seien M,N Mengen.

1. Wir setzen $M \setminus N := \{x \in M\ :\ x \notin N\}$, gelesen "$M$ ohne N", für die **Differenzenmenge von** M **und** N. Ist speziell $N \subset M$ so bezeichnen wir

   $$N^c := M \setminus N = \{x \in M\ :\ x \notin N\}.$$

   auch als das **Komplement von** N **in** M. Diese Menge existiert auf Basis des Aussonderungsaxioms mit der Grundmenge M.

2. Wir setzen $M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$ als die **Vereinigung von** M **und** N und lesen $M \cup N$ auch als “M vereinigt N”. Die Existenz von $M \cup N$ folgt aus dem Paarmengenaxiom und dem Vereinigungsaxiom und benötigt keine Grundmenge!

3. Wir setzen $M \cap N := \{x \in M \cup N : x \in M \wedge x \in N\}$ als die **Schnittmenge von** M **und** N und lesen $M \cap N$ auch als “M geschnitten N”. Diese Menge existiert auf Basis des Aussonderungsaxioms mit der Grundmenge $M \cup N$. Es folgt, dass M und N disjunkt genau dann sind, wenn $M \cap N = \emptyset$ gilt.

Wir können nun mit diesen Axiomen folgende Aussagen zeigen:

Lemma 4.14. *Es sei M eine Menge, $A, B \subset M$ (d.h. $A \subset M$, $B \subset M$), dann gilt*

i) $A \cup A^c = M$ *und* $A \cap A^c = \emptyset$

ii) $A = (A^c)^c$

iii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

iv) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Beweis. zu i) um die Gleichheit zwischen zwei Mengen zu zeigen, benötigen wir das Extensionalitätsaxiom. Wir teilen also unseren Beweis auf in die Beweise $A \cup A^c \subset M$ und $A \cup A^c \supset M$.

“$\subset$” Es gilt $A \subset M$ und per Definition auch $A^c \subset M$. Nach Übungsblatt 2, Nr.3(i) folgt nun $A \cup A^c \subset M$.

“$\supset$” Es sei $x \in M$. Ist $x \in A$, dann folgt $x \in A \cup A^c$. Ist andernfalls $x \notin A$, dann ist per Definition $x \in A^c$ und damit $x \in A \cup A^c$. Da x beliebig gewählt war, folgt, dass $M \subset A \cup A^c$ ist.

Der zweite Teil von i) ist trivial, denn angenommen es gäbe $x \in A \cap A^c$, dann folgt insbesondere $x \in A^c$ und $x \in A$, d.h. $x \notin A$ und $x \in A$. Das ist aber ein Widerspruch.

ii) - iv) sind Übungen. □

Ähnlich wie die Menge der Elemente der Elemente einer Menge, gibt es auch eine Menge, die der Teilmengen einer Menge, genannt die Potenzmenge.

Definition 4.15 (Potenzmengenaxiom)**.** Ist M eine Menge, so existiert eine Menge $\mathbb{P}(M)$, die genau die Teilmengen von M als Elemente enthält. $\mathbb{P}(M)$ ist eindeutig bestimmt und heißt Potenzmenge von M.

Beispiel 4.16. Ist $M = \{a, b\}$, so ist $\mathbb{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, M\}$.

Ein wichtiger Aspekt der Mathematik bezieht sich auf Aussagen über die Unendlichkeit. Dass diese überhaupt existiert, ist ebenfalls axiomatisch festgelegt. Genau gilt das **Unendlichkeitsaxiom**. Es besagt, dass es eine Menge I gibt, die die leere Menge enthält und wenn $X \in I$ ist, so ist auch $X \cup \{X\}$ ein Element von I. Wir bezeichnen diese Mengen als **(mengen-)induktiv**.

Beispiel 4.17. Eine (mengen-)induktive Menge ist gegeben durch

$$I = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}$$

Durch Identifikation mit der Anzahl der Elemente in den Elementen von I können wir I auch als die *natürlichen Zahlen (mit* 0*)*, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, auffassen.

5 Verneinung von Aussagen

Wir haben im vorherigen Abschnitt neue Symbole der Logik kennengelernt, die *Quantoren*: $\forall$, $\exists$ und $\exists!$. Im Folgenden werden wir uns besonders mit $\forall$ und $\exists$ beschäftigen und untersuchen, wie sich diese Symbole bei Verneinung von Aussagen verhalten.

Definition 5.1. Es sei M eine Menge und $A(\cdot)$ eine Vorschrift auf M. Wir definieren

$$\neg\,(\forall x \in M : A(x)) \;:\Leftrightarrow\; \exists x \in M : \neg A(x).$$

In einem einfachen Beispiel können wir das so auffassen: Betrachte einen Apfelbaum. Wir setzen M als die Menge aller Äpfel am Baum und jeder einzelne Apfel am Baum ist ein Element von M. $A(x)$ sei nun die Aussage, x ist ein roter Apfel. Dann gilt:

$$\neg\,\big(\text{Alle Äpfel am Baum sind rot.}\big) \;:\Leftrightarrow\; (\text{Es gibt einen Apfel am Baum, der nicht rot ist.})$$

Oftmals werden wir jedoch auch Aussagen untersuchen, die von zwei Werten abhängen, d.h. es gibt Mengen M und N und eine Aussage $A(x,y)$, die für $x \in M$ und $y \in N$ wahr oder falsch ist. Betrachte zum Beispiel M als die Menge der Studenten in Raum 1 und N als die Menge der Studenten in Raum 2 und untersuche die Aussage $A(x,y)$, die besagt, dass die Person x aus M und y aus N befreundet sind. Wie ist dann die Verneinung von

(Für alle Personen x in Raum M gibt es eine Person y in Raum N, sodass x und y befreundet sind.) ?

Eine Aussage, die von zwei Werten abhängt, kann man auch als Vorschrift der Form $A(\cdot,\cdot)$ auf $M \times N$ auffassen.

Lemma 5.2. *Es seien M,N Mengen und $A(\cdot,\cdot)$ eine Vorschrift auf $M \times N$. Dann gilt:*

$$\neg\,(\forall x \in M : \exists y \in N : A(x,y)) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in M : \forall y \in N : \neg A(x,y).$$

Beweis. Wir haben eine “genau dann, wenn”-Aussage zu zeigen, d.h. wir müssen zwei Richtungen beweisen:

Hin-Richtung)“$\Rightarrow$” $\neg\,(\forall x \in M : \exists y \in N : A(x,y)) \;\Rightarrow\; \exists x \in M : \forall y \in N : \neg A(x,y)$;

ück-Richtung)“$\Leftarrow$” $\exists x \in M : \forall y \in N : \neg A(x,y) \;\Rightarrow\; \neg\,(\forall x \in M \exists y \in N : A(x,y))$.

Wir betrachten zunächst die Hin-Richtung und setzen $B(x)$ als die Aussage “für x gilt $\exists y \in N : A(x,y)$”. Dann ist

$$\begin{aligned}
\neg\,(\forall x \in M : \exists y \in N : A(x,y)) &\Leftrightarrow \neg\,(\forall x \in M : B(x)) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg\, B(x) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg(\exists y \in N : A(x,y)) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg(\neg\,(\forall y \in N : \neg A(x,y))) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in M : \forall y \in N : \neg A(x,y).
\end{aligned}$$

Für die Rück-Richtung beachte, dass die obigen Folge-Pfeile sogar Äquivalenzen sind (nach Definition und Übungsblatt 1, Nr. 1). Demnach gilt auch die Rück-Richtung. $\square$

Beispiel 5.3. Wir betrachten folgende abstrakte Aussage – ihre Bedeutung wird euch im Laufe des Semesters klarer.

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \exists n_0 \in \{1,2,3,\ldots\} : \ \forall n \geq n_0 \ : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Die Verneinung dieser Aussage ist:

$$\exists \varepsilon > 0 \ : \forall n_0 \in \{1,2,3,\ldots\} : \ \exists n \geq n_0 \ : \frac{1}{n} \geq \varepsilon.$$

Überlegen Sie sich, welche der beiden Aussagen wahr oder falsch ist.

Zur Übung kann folgende Aussage vereinfacht werden:

$$\neg \left[\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in [0,1] : (|x-y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon)\right].$$

6 Abbildungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt zwei Mengen X, Y und wir wollen Zuordnungen zwischen Mengen untersuchen.

Definition 6.1. Eine **Abbildung** ist eine Zuordnung, die jedem $x \in X$ genau ein $f(x) = y \in Y$ zuordnet. Für Abbildungen schreiben wir $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ oder $f : X \to Y$, $y = f(x)$.

Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so nennt man X auch **Definitionsbereich (von f)** und Y **Wertebereich (von f)**. Eine Abbildung ist formal eindeutig definiert durch ihren **Graphen**. Wir setzen dabei

$$\operatorname{Graph} f := \{(x,y) \in X \times Y \ : \ y = f(x)\} \subset X \times Y.$$

Beispiel 6.2. Betrachten wir die Zuordnung $x \mapsto x^2$, dann ist diese wohldefiniert. Aber die Funktion $x \mapsto \pm\sqrt{x}$ ist nicht wohldefiniert, da einem x zwei Werte zugeordnet werden.

Definition 6.3. Es sei $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ eine Abbildung. Wir setzen für $A \subset X$, $B \subset Y$:

$$f(A) := \{y \in Y \ : \ (\exists x \in A \ : \ f(x) = y)\} \subset Y \text{ (}\textbf{Bildmenge}\text{ von } A\text{)}$$

und

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \ : \ f(x) \in B\} \subset X \text{ (}\textbf{Urbildmenge}\text{ von } B\text{)}.$$

Beispiel 6.4. Für die folgenden Beispiele verwenden wir als Grundmenge die Menge der reellen Zahlen, die wir mit $\mathbb{R}$ bezeichnen. Weiter setzen wir für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\}$ als das (abgeschlossene) Intervall von a bis b. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Für eine genaue Definition der reellen Zahlen sei auf die Analysis 1 verwiesen.

1. Dann ist $f(\mathbb{R}) = [0,\infty)$ und $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Beachte, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) \geq 0$, also ist $f(\mathbb{R}) \subset [0,\infty)$. Ferner gibt es für jedes $x \geq 0$ ein $y = \sqrt{x}$ mit $f(y) = x$, also $[0,\infty) \subset f(\mathbb{R})$. Insgesamt folgt $f(\mathbb{R}) = [0,\infty)$. Ähnlich folgt $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2. Es ist $f([-1,1]) = [0,1]$ und $f^{-1}([-1,1]) = f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$.

Lemma 6.5. *Es seien X,Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

1. *Für alle $A \subset X$ gilt $A \subset f^{-1}(f(A))$.*
2. *Für alle $B \subset Y$ gilt $f(f^{-1}(B)) \subset B$.*

Beweis. 2. ist Übung. Zu 1.: Sei $x \in A$. Dann existiert $y \in f(A)$ mit $f(x) = y$, folglich ist $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(f(A))$ wie behauptet. $\square$

Definition 6.6. Es seien $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt f

- **injektiv**, wenn für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ folgt $f(x) \neq f(y)$ (Merkregel: verschiedene Punkte in X haben verschiedene *Bilder* in Y).
- **surjektiv**, wenn $f(X) = Y$ gilt.
- **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung 6.7. Es gilt

1. f ist injektiv genau dann, wenn $f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ x = y$ gilt.
2. f ist surjektiv genau dann, wenn für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$.

Beispiel 6.8.

1. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
   Zur Injektivität: Seien $x, y \in [0,\infty)$ mit $x \neq y$. O.E. ist dann $x < y$. Dann ist aber auch $f(x) = x^2 < y^2 = f(y)$, also $f(x) \neq f(y)$. Es folgt, dass f injektiv ist.
   Zur Surjektivität: Beachte, $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$. Demnach ist f nicht surjektiv.
2. $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv. Beachte, $f(-1) = f(1)$, also ist f nicht injektiv. Ferner gilt für jedes $x \in [0,\infty)$ stets $f(\sqrt{x}) = x$ und somit ist f surjektiv.
3. $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2$ ist bijektiv.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv.

Definition 6.9. Sei Z eine weitere Menge und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen, so heißt $h := g \circ f : X \to Z$, $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$ **Komposition** und wir lesen $g \circ f$ als "g nach f".

Beispiel 6.10. Betrachte $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^2 - 1$, dann ist $g \circ f(x) = x^4 - 1$ und $f \circ g(x) = (x^2 - 1)^2$.

Satz und Definition 6.11. *Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Gibt es eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $g(f(x)) = x$ für alle $x \in X$ und $f(g(y)) = y$ für alle $y \in Y$, so ist g eindeutig bestimmt und heißt* ***Umkehrfunktion von*** *f. Wir schreiben in diesem Fall auch $f^{-1} : Y \to X$ anstelle von g. Ferner existiert eine solche Funktion g genau dann, wenn f bijektiv ist.*

Beweis. "$\Leftarrow$": Wir nehmen an, dass eine Abbildung g mit diesen Eigenschaften existiert. Dann gilt für $x, y \in X$ mit $x \neq y$:

$$g(f(x)) = x \neq y = g(f(y)),$$

also $f(x) \neq f(y)$ und damit ist f injektiv. Ferner ist $f(X) = Y$, denn:
"$\subset$" ist trivial (d.h. es folgt unmittelbar aus der Definition)
"$\supset$" Sei $y \in Y$. Dann ist $y = f(g(y)) \in f(X)$.
Insgesamt folgt $f(X) = Y$ und damit ist f surjektiv. Also ist f bijektiv.
"$\Rightarrow$": Sei nun f bijektiv. Dann besteht für alle $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ aus genau einem Element x_y. Definiere $g : Y \to X$ durch $g(y) = x_y$. Dann hat g die gewünschten Eigenschaften.

Beachte, dass die Eindeutigkeit direkt aus "$\Rightarrow$" folgt. $\square$

Beispiel 6.12. Nach Beispiel 6.8.3 ist $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2$ bijektiv. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ist gegeben durch $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Bemerkung 6.13. Wichtig! Für eine beliebige Abbildung $f : X \to Y$ existiert stets $f^{-1}(B)$, wenn $B \subset Y$ ist. Also existiert insbesondere auch stets $f^{-1}(\{y\})$ für jedes $y \in Y$. Hingegen existiert $f^{-1}(y)$ dann und nur dann wenn f bijektiv ist.

7 Die natürlichen Zahlen

In diesem Abschnitt wollen wir nochmal genauer auf induktive Mengen eingehen und daraus das **Induktionsprinzip** herleiten, welches eine weitere Beweistechnik liefert.

Definition 7.1.

1. Eine **induktive Menge** ist eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ mit
   - $1 \in M$
   - $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$
2. Wir setzen $\mathbb{M} := \{M \subset \mathbb{R} \ : \ M \text{ induktiv } \}$ und definieren

$$\mathbb{N} := \bigcap_{M \in \mathbb{M}} M = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Bemerkung 7.2. Die folgenden Mengen sind induktiv: $\{\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, \ldots\}$, $\{1, 2, 3, \ldots, a, a+1, a+2, \ldots\}$ für irgendein $a \in \mathbb{R}$ sowie $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Insbesondere ist $\mathbb{N}$ selbst induktiv und ist M induktiv, so ist $\mathbb{N} \subset M$.

Satz 7.3. *(Induktionsprinzip) Es sei $A(n)$ eine Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn folgende Aussagen wahr sind* *a)* $A(1)$ *ist wahr* *<u>und</u>*

b) $(A(n)$ *ist wahr für ein* $n \in \mathbb{N} \Rightarrow A(n+1)$ *ist wahr.*$)$

Beweis. Wir haben eine "genau dann, wenn"-Aussage zu zeigen, d.h. wir haben zu zeigen

(Hinrichtung)"$\Rightarrow$" $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ a)$\wedge$ b) ist wahr;
Diese Richtung ist klar, denn $1 \in \mathbb{N}$ und somit ist $A(1)$ wahr und $n \in \mathbb{N}$ impliziert $n+1 \in \mathbb{N}$, also gilt $A(n)$ wahr impliziert $A(n+1)$ wahr.

Rückrichtung)"$\Leftarrow$" a)$\wedge$ b) ist wahr $\Rightarrow A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.
Wir setzen $M := \{n \,:\, A(n) \text{ ist wahr }\}$. Beh.: M ist induktiv.
Zunächst ist $1 \in M$, da $A(1)$ wahr ist aufgrund von Beh. a)
Sei nun $n \in M$, dann folgt $A(n)$ ist wahr nach Definition von M. Da b) gilt, folgt nun, dass $A(n+1)$ wahr ist, also ist $n+1 \in M$.
Es folgt, dass M die Bedingungen für eine induktive Menge erfüllt.
Da jede induktive Menge die Menge $\mathbb{N}$ enthält und $A(n)$ wahr ist für alle $n \in M$ (nach Definition), folgt nun insbesondere $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

□

Lemma 7.4. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Wir verwenden das Induktionsprinzip. Hierfür betrachten wir die Aussage:

$$A(n) \;:\Leftrightarrow \text{Für } n \text{ gilt: } \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Der Induktionsbeweis besteht aus zwei Teilen, dem Induktionsanfang (IA) ($A(1)$ gilt) und dem Induktionsschritt (IS) ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gilt). Wichtig: Im Induktionsschritt gehen wir davon aus, dass $A(n)$ gilt. Diese Aussage muss dann nicht gezeigt werden! Man nennt in diesem Zusammenhang $A(n)$ auch Induktionsvoraussetzung (IV) und es hilft diesen vor dem Induktionsschritt zu notieren.
Nun zum Beweis des Lemmas:

Induktionsanfang (IA; "$n = 1$"): Zu zeigen ist, dass $A(n)$ wahr ist für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung (IV): Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A(n)$ ist wahr, d.h. für dieses n gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(Beachte: Diese Aussage ist NICHT zu zeigen, wir setzen sie voraus)

Induktionsschritt (IS): Zu zeigen ist, dass $A(n+1)$ wahr ist.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) &\overset{(IB)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Es folgt $A(n+1)$ ist wahr.

Aus (IA) und (IS) in Kombination mit dem Satz zum Induktionsprinzip folgt $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Aussage gezeigt. $\square$

Bemerkung 7.5. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass das Induktionsprinzip auch dann gilt, wenn nicht bei $n = 1$ sondern bei $n = n_0$ angefangen wird, wobei n_0 eine beliebige ganze Zahl ist.

8 Spezielle Mengen

Wir werden in vielen Situationen mit den folgenden Mengen konfrontiert werden:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \{1,2,3\dots\} && \text{(natürliche Zahlen),} \\
\mathbb{N}_0 &= \{0,1,2,\dots\} && \text{(natürliche Zahlen mit 0),} \\
\mathbb{Z} &:= \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\} && \text{(ganze Zahlen)} \\
\mathbb{Q} &:= \left\{\frac{z}{n} \;:\; z \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\right\} && \text{(rationale Zahlen),} \\
\mathbb{R} &:= \text{Menge der reellen Zahlen} && \text{(Konstruktion kompliziert; siehe Analysis 1),} \\
\mathbb{C} &:= \{a+ib \;:\; a,b \in \mathbb{R}\} && \text{(komplexe Zahlen),}
\end{aligned}$$

wobei i *imaginäre Einheit* genannt wird, und

$$\text{für } p \in \mathbb{N}\text{: } \mathbb{Z}_p := \{0,1,\dots,p-1\} \qquad (p\text{-Restklassenring}).$$

Im Folgenden werden wir einen genaueren Blick auf $\mathbb{C}$ und auf $\mathbb{Z}_p$ für $p \in \mathbb{N}$ werfen.

8.1 Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Ein wohlbekanntes Problem ist, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ nicht zu lösen ist mit Hilfe der reellen Zahlen. Um dieser "Unvollständigkeit" entgegenzuwirken führen wir die imaginäre Einheit i ein, die die Eigenschaft

$$i^2 = -1$$

besitzt. Fügen wir i und alle damit entstehenden Kombinationsmöglichkeiten zu den reellen Zahlen hinzu, so erhalten wir die Menge der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{C} = \{a + ib \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

In $\mathbb{C}$ lässt sich nun die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ lösen. Sie hat die beiden Lösungen i und $-i$. Wir können in $\mathbb{C}$ wie gewohnt rechnen:

Es sei $z_1 = a + ib$ und $z_2 = c + id$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d) \\ z_1 \cdot z_2 &= (a + ib)(c + id) = ac + i^2 bd + i(bc + ad) = ac - bd + i(bc + ad). \end{aligned}$$

Insbesondere die Addition gibt uns die Möglichkeit $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu identifizieren:

Bildeinfügen

Definition 8.1. Es sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

1. Wir bezeichnen den *Realteil* von z mit a, d.h. $Re(z) = a$.
2. Wir bezeichnen den *Imaginärteil* von z mit b, d.h. $Im(z) = b$.
3. Wir setzen $|z| = \left(a^2 + b^2\right)^{1/2}$, der *Betrag von z*.
4. Wir setzen $\bar{z} = a - ib$ als *die zu z komplex konjugierte Zahl*.

Bemerkung 8.2. Wir können in der Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Realteil und Imaginärteil als x und y Koordinate auffassen. Der Betrag beschreibt gerade die Länge dieses Vektors.

Beispiel 8.3. 1. Betrachte $z = i$, dann ist $Re(i) = 0$, $Im(i) = 1$ und $|i| = \left(0^2 + 1^2\right)^{1/2} = 1$. Außerdem ist $\bar{i} = -i$

2. Betrachte $z = 1 + i$, dann ist $Re(1 + i) = 1$, $Im(1 + i) = 1$, $|1 + i| = \left(1^2 + 1^2\right)^{1/2} = \sqrt{2}$ und $\overline{1 + i} = 1 - i$.

Wir bemerken, dass durch die Setzung $i^2 = -1$ wir eine Multiplikation haben, doch was ist z.B. $\frac{1+i}{i}$?

Lemma 8.4. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $z\bar{z} = |z|^2 \in [0, \infty)$.*

Beweis. Sei $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 + i(ab - ba) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

□

Auf diese Art lassen sich zwei komplexe Zahlen einfach teilen in dem wir einen Bruch mit dem komplex konjugierten Nenner erweitern: Es gilt

$$\frac{1 + i}{i} = \frac{(1 + i)(-i)}{i(-i)} = -i - i^2 = 1 - i$$

und

$$\frac{i}{i+1} = \frac{i(-i+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Allgemein gilt: Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, dann ist

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Bisher haben wir eine komplexe Zahl als x und y Koordinate in der Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aufgefasst. Hier können wir gut die Addition graphisch darstellen. Wir bemerken, dass wir Punkte in der Ebene auch durch den Abstand zum Ursprung der Ebene und einen Winkel auffassen können. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$|z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = Re(z) + iIm(z) = z,$$

wobei $\varphi \in (-\pi, \pi]$ den Winkel zur positiven x-Achse beschreibt. Ein Zusammenhang, den wir hier vorweg nehmen ist:

Satz 8.5. *(Eulersche Formel) Für alle $\varphi \in (-\pi, \pi]$ gilt*

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi).$$

Beachte: Sind $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit

$$z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1} \quad \text{und} \quad z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2},$$

dann ist

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\varphi_1} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Multiplikation in $\mathbb{C}$ steht also für eine Addition der Winkel, d.h. eine Drehung.

8.2 Der Restklassenring $\mathbb{Z}_p$

Wir werden in diesem Abschnitt die Menge $\mathbb{Z}_p$ ausführlich einführen und eine Rechenvorschrift auf dieser Menge definieren. Hierfür benötigen wir folgende Definitionen

Definition 8.6. Es sei M eine Menge. Eine *Relation* ist eine Teilmenge $R \subset M \times M := \{(n,m) \,:\, n,m \in M\}$.

1. Eine Relation auf M heißt *reflexiv*, wenn für alle $x \in M$ gilt $(x,x) \in R$.
2. Eine Relation auf M heißt *symmetrisch*, wenn für alle $x,y \in M$ mit $(x,y) \in R$ folgt $(y,x) \in R$.
3. Eine Relation auf M heißt *transitiv*, wenn für alle $x,y,z \in M$ mit $(x,y),(y,z) \in R$ folgt $(x,z) \in R$.
4. Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt *Äquivalenzrelation*.

Beispiel 8.7. 1. Betrachte $M = \mathbb{R}$ und $R_= = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, x = y\}$. Dann ist $R_=$ eine Äquivalenzrelation:

- $R_=$ ist reflexiv, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = x$.

- $R_=$ ist symmetrisch, denn wenn $x = y$ gilt für $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt auch $y = x$.
- $R_=$ ist transitiv, denn wenn $x = y$ und $y = z$ gilt für $x, y, z \in \mathbb{R}$, dann ist $x = y = z$ also auch $x = z$.

2. $R_\leq = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, x \leq y\}$ ist keine Äquivalenzrelation, da wenn $x \leq y$ für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dann muss nicht unbedingt auch $y \leq x$ sein. Beachte aber $R_\leq$ ist reflexiv, denn $x \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und transitiv, denn wenn $x \leq y$ und $y \leq z$ für $x, y, z \in \mathbb{R}$, dann ist $x \leq z$.
3. $M =$"Menge aller Geraden in $\mathbb{R}^N$" und $R_\| = \{(g,h) \in M \,:\, g$ ist parallel zu $h\}$ ist eine Äquivalenzrelation, denn
   - $R_\|$ ist reflexiv, denn für alle $h \in M$ gilt: h ist parallel zu sich selbst.
   - $R_\|$ ist symmetrisch, denn wenn eine Gerade g zu einer Geraden h parallel ist, dann gilt diese Aussage auch andersherum.
   - $R_\|$ ist transitiv, denn wenn g, h, f Geraden sind und g parallel zu h und h parallel zu f ist, dann ist auch g parallel zu f.
4. Sei $p \in \mathbb{N}$ und $M = \mathbb{Z}$. Dann ist $R_p = \{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,:\, p \text{ teilt } n - m\}$ eine Äquivalenzrelation, denn
   - R_p ist reflexiv, denn für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $n - n = 0$ und p teilt 0.
   - R_p ist symmetrisch: Sind $n, m \in \mathbb{Z}$ und p teilt $n - m$, dann gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $n - m = pk$ und dann ist auch $m - n = (-k)p$ durch p teilbar.
   - R_p ist transitiv: Es seien $n, m, r \in \mathbb{Z}$ mit p teilt $n - m$ und $m - r$, dann gibt es $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $n - m = k_1 p$ und $m - r = k_2 p$. Es folgt $n = k_1 p + m$ und $r = m - k_2 p$ und damit ist
     $$n - r = (k_1 p + m) - (m - k_2 p) = k_1 p + k_2 p = (k_1 + k_2) p$$
     durch p teilbar.

Im letzten Beispiel haben wir oft benutzt, dass es einen Rest beim Teilen durch p gibt, d.h. ist $(n,m) \in R_p$, dann gibt es eine kleinste nichtnegative Zahl $r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ mit $n = r + k_1 p$ und $m = r + k_2 p$ für passende $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, wir können also Elemente wie n und m zusammenfassen in der Menge

$$[r]_p = \{\ldots, r - 2p, r - p, r, r + p, r + 2p, \ldots\} = \{x \in \mathbb{Z} \,:\, p \text{ teilt } x - r\}.$$

Wir fassen alle möglichen Reste für festes p zusammen in der Menge

$$\mathbb{Z}_p = \{[0]_p, [1]_p, \ldots, [p-1]_p\} \cong \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Beachte: Wir können in $\mathbb{Z}_p$ rechnen wie gewohnt mit ein paar Ausnahmen wie zum Beispiel:

$$[p-1]_p + [1]_p = [0]_p, \text{ wir sagen auch } \quad p - 1 + 1 = 0 \bmod p.$$

Beispiel 8.8. 1. Betrachte $p = 4$, dann ist $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ und es gilt

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

2. Betrachte $p = 2$, dann ist $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ und es gilt

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

9 Anhang

Auf den folgenden Seiten finden Sie begleitende Aufgaben zum Vorkurs. In den Übungsaufgaben werden Sie in erster Linie überprüfen können in wie weit Sie den Vorlesungsstoff verstanden haben. Darüber hinaus lernen Sie erst dort, wie Mathematik funktioniert. Nicht immer ist der Lösungsweg offensichtlich und oft müssen Sie eine lange Zeit an einer Aufgabe arbeiten, bis Sie die Lösung aufschreiben können.

Diese Zeit ist jedoch notwendig und wichtig, denn erst mit dieser Zeit kommt auch das *richtige* Verständnis der Problemstellungen. Beachten Sie, dass erst diejenigen Aufgaben, die Sie aufschreiben und erklären können, richtig verstanden sind. Wie Sie an Übungsaufgaben herangehen können, können Sie auch in [2] nachlesen.

Sollten Sie Interesse an weiterer Literatur zu den Einstiegsvorlesungen suchen, bieten sich z.B. die folgende unvollständige Liste an Lehrbüchern an. Beachten Sie, dass in Ihren jeweiligen Vorlesungen Ihnen genauere und besser abgestimmte Empfehlungen gegeben werden! Die mit $*$ gekennzeichneten Werke eignen sich m. E. besonders gut.

- M. Artin, *Algebra*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.
- M. Barner und F. Flohr, *Analysis I*, deGruyter Lehrbuch, Berlin, 2000.
- A. Beutelspacher, *Lineare Algebra*, Vieweg Verlag, Gießen, 2003.$*$
- S. Bosch, *Lineare Algebra*, Springer Verlag, 2014.$*$
- T. Bröcker, *Analysis I*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995.
- H.-D. Ebbinghaus, *Zahlen*, Springer, 1992.
- G. Fischer, *Lineare Algebra*, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2005.
- O. Forster, *Analysis I*, Vieweg, 1985.$*$
- H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis: Teil 1*, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006.

- K. Königsberger, *Analysis 1*, Springer, Berlin, 1993.$*$
- M. Kreh und F. Modler, *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1*, Springer Spektrum, 2016.$*$
- W. Walter, *Analysis 1*, Springer, 1995.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT
Dr. Sven Jarohs

Mathematik Vorkurs
Übungen

Blatt 1

Begründen Sie Ihre Antwort zu den folgenden Fragen und Aussagen mit Hilfe der gelernten Regeln aus der Logik.

1. Es seien A und B Aussagen. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

   (i) $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

   (ii) $(\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$ (Beachten Sie: “$\Leftarrow$” wurde bereits in der Vorlesung gezeigt)

   (iii) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

2. Es seien A und B Aussagen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) $A \Rightarrow B$

   (ii) $\neg B \Rightarrow \neg A$

   (iii) $\neg(A \wedge \neg B)$

3. Formulieren Sie zu jeder Aufgabe Beispielsätze anhand derer sich die Implikationen bzw. Äquivalenzen veranschaulichen lassen.

4. Nach einem Mordfall gibt es drei Verdächtige, A, B und C, von denen zumindest einer der Täter sein muss. Nachdem sie und die Zeugen getrennt vernommen wurden, kennen die Ermittler folgende Fakten:

   - Wenn A Täter ist, dann müssen B oder C ebenfalls Täter sein.
   - Wenn B Täter ist, dann ist A unschuldig.
   - Wenn C Täter ist, dann ist auch B Täter.

   Lässt sich damit herausfinden, wer von den dreien schuldig bzw. unschuldig ist? Hierbei ist eine Person schuldig genau dann, wenn Sie auch Täter ist. Ansonsten bezeichnen wir die Person als unschuldig.

5. Ist der folgende Schluss richtig?
   (“Wer von der Quantenmechanik nicht schockiert ist, der hat sie nicht verstanden” (Nils Bohr) $\wedge$ “Niemand versteht die Quantenmechanik” (Richard Feynman)) $\Rightarrow$ “Niemand ist von der Quantenmechanik schockiert”

6. An einer Weggabelung in der Wüste leben zwei Brüder, die vollkommen gleich aussehen. Jedoch sagt einer immer die Wahrheit und der andere lügt immer. Schon halb verdurstet kommt man zu dieser Weggabelung und weiß genau: Einer der beiden Wege führt zu einer Oase, der andere hingegen immer tiefer in die Wüste hinein. Man darf aber nur einem der Brüder (man weiß nicht, welcher es ist) genau eine Frage stellen. Was muss man fragen, um sicher den Weg zur Oase zu finden?

7. Lösen Sie das folgende Problem: Welche der folgenden Personen sagt die Wahrheit, wenn nur genau eine der dreien die Wahrheit sagt?

   Laura sagt: *"Hannah lügt."*

   Hannah sagt: *"Julia lügt."*

   Julia sagt: *"Laura und Hannah lügen."*

8. Vor Ihnen stehen drei Kisten, von denen Sie nur eine wählen dürfen. In zwei Kisten ist Stroh, in einer Gold. Der Inhalt der gewählten Kiste gehört Ihnen. Auf den Kisten steht

   1. Kiste: Hier ist Stroh drin.

   2. Kiste: Hier ist Gold drin.

   3. Kiste: In der 2. Kiste ist Stroh.

   Leider ist nur genau eine der drei Aufschriften richtig. Welche Kiste wählen Sie?

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT
Dr. Sven Jarohs

Mathematik Vorkurs
Übungen

Blatt 2

1. In dieser Aufgabe dürfen Sie Ihr Schulwissen verwenden. Es seien a, b reelle Zahlen und n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie

   (i) mit Hilfe eines direkten Beweises: Ist n eine gerade Zahl, so ist n^2 eine gerade Zahl.

   (ii) per Kontraposition: Teilt eine Primzahl p eine Zahl n^2 so teilt p auch n.

   (iii) per Widerspruchsbeweis: Ist $a \cdot b = 0$, so gilt $(a = 0 \lor b = 0)$.

2. Schreiben Sie das Unendlichkeitsaxiom und das Potenzmengenaxiom in einer mathematischen Kurzform mit Hilfe von Quantoren.

3. Es sei X eine Menge. Zeigen Sie für $A, B \subset X$:

   (i) $A \cup B \subset X$,

   (ii) $A \cap B \subset X$.

4. Es sei X eine Menge und $A, B \subset X$ seien Teilmengen. Zeigen Sie

   i) $A = (A^c)^c$,

   ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

   iii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

5. Es seien A und B Mengen. Zeigen Sie:

$$A = B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B).$$

6. Schreiben Sie die folgende Kombinationen aus logischen Symbolen als Satz aus, wie Sie es lesen würden:

   (i) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in [0,1] : (|x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon)$

   (ii) $\forall a, b \geq 0 \land \forall p, q > 1 \ : \ \left[q = \dfrac{p}{p-1} \ \Rightarrow \ ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \right]$

   (iii) $\exists L > 0 \ : \ \forall ab \geq 0 \ : \ [ab = 1 \ \Rightarrow \ a + b \leq L]$

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT
Dr. Sven Jarohs

Mathematik Vorkurs
Übungen

Blatt 2

1. In dieser Aufgabe dürfen Sie Ihr Schulwissen verwenden. Es seien a, b reelle Zahlen und n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie

   (i) mit Hilfe eines direkten Beweises: Ist n eine gerade Zahl, so ist n^2 eine gerade Zahl.

   (ii) per Kontraposition: Teilt eine Primzahl p eine Zahl n^2 so teilt p auch n.

   (iii) per Widerspruchsbeweis: Ist $a \cdot b = 0$, so gilt $(a = 0 \vee b = 0)$.

2. Schreiben Sie das Unendlichkeitsaxiom und das Potenzmengenaxiom in einer mathematischen Kurzform mit Hilfe von Quantoren.

3. Es sei X eine Menge. Zeigen Sie für $A, B \subset X$:

   (i) $A \cup B \subset X$,

   (ii) $A \cap B \subset X$.

4. Es sei X eine Menge und $A, B \subset X$ seien Teilmengen. Zeigen Sie

   i) $A = (A^c)^c$,

   ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

   iii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

5. Es seien A und B Mengen. Zeigen Sie:

$$A = B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B).$$

6. Schreiben Sie die folgende Kombinationen aus logischen Symbolen als Satz aus, wie Sie es lesen würden:

$$\text{(i)} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in [0,1] : (|x-y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon)$$

$$\text{(ii)} \quad \forall a, b \geq 0 \wedge \forall p, q > 1 \; : \; \left[q = \frac{p}{p-1} \;\Rightarrow\; ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right]$$

$$\text{(iii)} \quad \exists L > 0 \; : \; \forall ab \geq 0 \; : \; [ab = 1 \;\Rightarrow\; a + b \leq L]$$

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT
Dr. Sven Jarohs

Mathematik Vorkurs
Übungen

Blatt 3

1. Vereinfachen Sie die Schreibweise der folgende Aussagen

   (i) $\neg\left[\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in [0,1] : (|x-y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon)\right]$

2. Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie $f(f^{-1}(B)) \subset B$ für alle $B \subset Y$. Geben Sie ferner ein Beispiel an, in dem $f(f^{-1}(B)) \neq B$ gilt.

3. Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Abbildung $f : \{a, b, c\} \to Y$ an, die injektiv, surjektiv bzw. bijektiv ist. Dabei darf Y eine von Ihnen beliebig gewählte Menge sein.

4. Es seien X, Y Mengen. Zeigen Sie: $f : X \to Y$ ist injektiv genau dann, wenn $f^{-1}(f(A)) = A$ für alle $A \subset X$ gilt.

5. Es seien X, Y Mengen. Zeigen Sie: $f : X \to Y$ ist surjektiv genau dann, wenn $f(f^{-1}(B)) = B$ für alle $B \subset Y$ gilt.

Blatt 3

1. Vereinfachen Sie die Schreibweise der folgende Aussagen

   (i) $\neg\left[\forall\varepsilon>0\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x,y\in[0,1]:(|x-y|<\delta\Rightarrow|x^2-y^2|<\varepsilon)\right]$

2. Es seien X,Y Mengen und $f:X\to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie $f(f^{-1}(B))\subset B$ für alle $B\subset Y$. Geben Sie ferner ein Beispiel an, in dem $f(f^{-1}(B))\neq B$ gilt.

3. Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Abbildung $f:\{a,b,c\}\to Y$ an, die injektiv, surjektiv bzw. bijektiv ist. Dabei darf Y eine von Ihnen beliebig gewählte Menge sein.

4. Es seien X,Y Mengen. Zeigen Sie: $f:X\to Y$ ist injektiv genau dann, wenn $f^{-1}(f(A))=A$ für alle $A\subset X$ gilt.

5. Es seien X,Y Mengen. Zeigen Sie: $f:X\to Y$ ist surjektiv genau dann, wenn $f(f^{-1}(B))=B$ für alle $B\subset Y$ gilt.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT
Dr. Sven Jarohs

Mathematik Vorkurs
Übungen

Blatt 4

1. Schreiben Sie die Definition von injektiv, surjektiv und bijektiv mit Hilfe der Quantoren $\forall$, $\exists$ und $\exists!$.
2. Zeigen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzips
$$\forall n \in \mathbb{N} \, : \, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. Zeigen Sie für alle $n \geq 5$ gilt
$$n^2 < 2^n.$$
4. Zeigen Sie, dass 3 die Zahl $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ teilt.
5. Finden Sie den logischen Fehler im Beweis der folgenden offensichtlich falschen Behauptung:

   Beh.: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Eine beliebige Ansammlung von n Schachfiguren besteht entweder nur aus schwarzen Figuren oder nur aus weißen Figuren.

   Beweis per Induktion. I.A. $n = 1$: Offensichtlich ist eine Schachfigur schwarz oder weiß.

   I.B.: Die Behauptung gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

   I.S. $n \to n+1$: Es seien nun $n+1$ Schachfiguren gegeben. Wir wählen eine beliebige Schachfigur x der Ansammlung aus, die wir aus der herausnehmen. Dadurch bleiben noch n Schachfiguren übrig. Nach I.B. sind diese nur bestehend aus schwarzen oder weißen Schachfiguren. Ohne Einschränkungen können wir annehmen, dass es sich um schwarze Schachfiguren handelt.
   Nun wird Figur x wieder der Gruppe hinzugefügt und eine andere Figur y herausgenommen. Zu beachten ist, dass es sich bei y nach voheriger Wahl um eine schwarze Schachfigur handelt.
   In der verbleibenden Menge sind nun nur noch schwarze Figuren und die noch unbekannte Figur x enthalten. Weiter enthält diese Menge – da Figur x mit Figur y ausgetauscht wurde – wieder nur n Figuren und folglich müssen nach I.B. alle Figuren schwarz oder weiß sein. Also muss insbesondere in unserem Fall x eine schwarze Figur sein. Es folgt, dass alle $n+1$ Figuren schwarz sind, was den Induktionsschritt zeigt.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT
Dr. Sven Jarohs

Mathematik Vorkurs
Übungen

Blatt 4

1. Schreiben Sie die Definition von injektiv, surjektiv und bijektiv mit Hilfe der Quantoren $\forall$, $\exists$ und $\exists!$.
2. Zeigen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzips
$$\forall n \in \mathbb{N} \, : \, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. Zeigen Sie für alle $n \geq 5$ gilt
$$n^2 < 2^n.$$
4. Zeigen Sie, dass 3 die Zahl $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ teilt.
5. Finden Sie den logischen Fehler im Beweis der folgenden offensichtlich falschen Behauptung:

   Beh.: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Eine beliebige Ansammlung von n Schachfiguren besteht entweder nur aus schwarzen Figuren oder nur aus weißen Figuren.

   Beweis per Induktion. I.A. $n = 1$: Offensichtlich ist eine Schachfigur schwarz oder weiß.

   I.B.: Die Behauptung gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

   I.S. $n \to n+1$: Es seien nun $n+1$ Schachfiguren gegeben. Wir wählen eine beliebige Schachfigur x der Ansammlung aus, die wir aus der herausnehmen. Dadurch bleiben noch n Schachfiguren übrig. Nach I.B. sind diese nur bestehend aus schwarzen oder weißen Schachfiguren. Ohne Einschränkungen können wir annehmen, dass es sich um schwarze Schachfiguren handelt.
   Nun wird Figur x wieder der Gruppe hinzugefügt und eine andere Figur y herausgenommen. Zu beachten ist, dass es sich bei y nach voheriger Wahl um eine schwarze Schachfigur handelt.
   In der verbleibenden Menge sind nun nur noch schwarze Figuren und die noch unbekannte Figur x enthalten. Weiter enthält diese Menge – da Figur x mit Figur y ausgetauscht wurde – wieder nur n Figuren und folglich müssen nach I.B. alle Figuren schwarz oder weiß sein. Also muss insbesondere in unserem Fall x eine schwarze Figur sein. Es folgt, dass alle $n+1$ Figuren schwarz sind, was den Induktionsschritt zeigt.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT
Dr. Sven Jarohs

Mathematik Vorkurs
Übungen

Blatt 5

1. Bestimmen Sie für die folgenden Zahlen den Realteil, Imaginärteil und den Betrag. Zeichnen Sie ferner diese Werte in die (komplexe Zahlen-)Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$i+1, \quad 3+i, \quad \frac{1+i}{2}, \quad 2, \quad 3i.$$

2. Bestimmen Sie folgende Zahlen in der Form $a+ib$:

$$(i+1)^2, \quad (i+1)(i-1), \quad (i-1)^2, \quad \frac{i+1}{i-1}, \quad \frac{i}{1+3i}.$$

3. Finden Sie diejenigen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = i$.

4. Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Relationen um Äquivalenzrelationen handelt.

   (i) Es sei M die Menge aller Menschen und

   $$R = \{(a,b) \in M \times M \;:\; a \text{ ist im selben Monat wie } b \text{ geboren}\}.$$

   (ii) Sei $M = \mathbb{C}$ und $R = \{(x,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \;:\; \mathrm{Re}\,(\mathrm{x}-\mathrm{y}) \geq 0\}$.

   (iii) Sei $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{\binom{z}{n} \;:\; z \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ und $R = \left\{ \left(\binom{a_1}{a_2}, \binom{b_1}{b_2}\right) \in M \;:\; a_1 b_2 = b_1 a_2 \right\}$.

5. Geben Sie analoge Tafeln zu den Beispielen in 8.8 für die Multiplikation in $\mathbb{Z}_4$ und $\mathbb{Z}_2$.

6. (i) Betrachten Sie $\mathbb{Z}_p$ für $p = 3,4,5,6$. Für welche $x \in \mathbb{Z}_p$ gibt es $y \in \mathbb{Z}_p$ mit $x \cdot y = 1 \bmod p$?

   (ii) Formulieren Sie eine allgemeingültige Antwort auf die Frage: Welche Bedingungen muss $p \in \mathbb{N}$ erfüllen, damit es für jedes $x \in \mathbb{Z}_p$, $x \neq 0$ ein $y \in \mathbb{Z}_p$ gibt, so dass $x \cdot y = 1 \bmod p$ gilt?

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT
Dr. Sven Jarohs

Mathematik Vorkurs
Übungen

Blatt 5

1. Bestimmen Sie für die folgenden Zahlen den Realteil, Imaginärteil und den Betrag. Zeichnen Sie ferner diese Werte in die (komplexe Zahlen-)Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$i+1, \quad 3+i, \quad \frac{1+i}{2}, \quad 2, \quad 3i.$$

2. Bestimmen Sie folgende Zahlen in der Form $a+ib$:

$$(i+1)^2, \quad (i+1)(i-1), \quad (i-1)^2, \quad \frac{i+1}{i-1}, \quad \frac{i}{1+3i}.$$

3. Finden Sie diejenigen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = i$.

4. Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Relationen um Äquivalenzrelationen handelt.

   (i) Es sei M die Menge aller Menschen und

   $$R = \{(a,b) \in M \times M \ : \ a \text{ ist im selben Monat wie } b \text{ geboren}\}.$$

   (ii) Sei $M = \mathbb{C}$ und $R = \{(x,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}\,(\mathrm{x}-\mathrm{y}) \geq 0\}$.

   (iii) Sei $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{\binom{z}{n} \ : \ z \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ und $R = \left\{(\binom{a_1}{a_2}, \binom{b_1}{b_2}) \in M \ : \ a_1 b_2 = b_1 a_2\right\}$.

5. Geben Sie analoge Tafeln zu den Beispielen in 7.8 für die Multiplikation in $\mathbb{Z}_4$ und $\mathbb{Z}_2$.

6. (i) Betrachten Sie $\mathbb{Z}_p$ für $p = 3,4,5,6$. Für welche $x \in \mathbb{Z}_p$ gibt es $y \in \mathbb{Z}_p$ mit $x \cdot y = 1 \bmod p$?

   (ii) Formulieren Sie eine allgemeingültige Antwort auf die Frage: Welche Bedingungen muss $p \in \mathbb{N}$ erfüllen, damit es für jedes $x \in \mathbb{Z}_p$, $x \neq 0$ ein $y \in \mathbb{Z}_p$ gibt, so dass $x \cdot y = 1 \bmod p$ gilt?

Literatur

[1] M. Junker, *Einführung in die Sprache der Mathematik*, 2010, online verfügbar: http://home.mathematik.uni-freiburg.de//junker/skripte/Grundlagen-WS1011.pdf

[2] M. Lehn, *Wie bearbeitet man ein Übungsblatt?*, online verfügbar: https://www.agtz.mathematik.uni-mainz.de/wie-bearbeitet-man-ein-uebungsblatt-von-prof-dr-manfred-lehn/