FACHBEREICH INFORMATIK UND MATHEMATIK
UNIVERSITÄT FRANKFURT/MAIN

KLAUSUR

für das Staatsexamen L3 Mathematik
im Herbst 2011
am 08.09.2011 von 9-13 Uhr

A. Grundwissen

I. Elementarmathematik
- Aufgabe 1 (2 Punkte)
- Aufgabe 2 (2 Punkte)

II. Analysis
- Aufgabe 3 (1 Punkt)
- Aufgabe 4 (3 Punkte)
- Aufgabe 5 (1 Punkt)

III. Differenzialgleichungen
- Aufgabe 6 (2 Punkte)

IV. Lineare Algebra und Geometrie
- Aufgabe 7 (2 Punkte)
- Aufgabe 8 (2 Punkte)
- Aufgabe 9 (2 Punkte)
- Aufgabe 10 (2 Punkte)

V. Stochastik
- Aufgabe 11 (2 Punkte)
- Aufgabe 12 (2 Punkte)
- Aufgabe 13 (2 Punkte)

B. Vertiefungsgebiete

I. Algebra
- Aufgabe 14 (3 Punkte)
- Aufgabe 15 (2 Punkte)

II. Diskrete Mathematik
- Aufgabe 16 (2 Punkte)
- Aufgabe 17 (4 Punkte)

III. Geometrie und Topologie
- Aufgabe 18 (3 Punkte)
- Aufgabe 19 (1 Punkt)
- Aufgabe 20 (2 Punkte)

IV. Zahlentheorie
- Aufgabe 21 (2 Punkte)
- Aufgabe 22 (2 Punkte)

C. Didaktik (nur für Kandidaten nach neuer Ordnung)

I. Messen
- Aufgabe 23 (2 Punkte)

II. Zahlenfolgen
- Aufgabe 24 (3 Punkte)

III. Kombinatorik
- Aufgabe 25 (3 Punkte)

IV. Üben
- Aufgabe 26 (2 Punkte)

Aufgaben für die Staatsexamensklausur L3
im Herbst 2011

A. Grundwissen

I. Elementarmathematik

Aufgabe 1

Sei ein komplexes z mit $|z| = 1$ gegeben.
a) Vereinfachen Sie $|z+1|^2 + |z-1|^2$.
b) Sei nun außerdem $z \neq \pm 1$. Zeigen Sie, dass 0 , $z+1$ und $z-1$ in der Gaußschen Zahlenebene die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreicks sind.

(2 Punkte)

Aufgabe 2

Seien $a < b$ zwei natürliche Zahlen.

(a) Sei r der Rest, der bei Division von b duch a entsteht. Zeigen Sie: Bei Division von $2^b - 1$ durch $2^a - 1$ bleibt der Rest $2^r - 1$.

(b) Sei g der ggT von a und b. Zeigen Sie anhand des Euklidischen Algorithmus, dass $2^g - 1$ der ggT von $2^a - 1$ und $2^b - 1$ ist.

(2 Punkte)

II. Analysis

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gelte $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Beweisen Sie, dass die Funktion $g(x) := f(x+1) - f(x)$ die Eigenschaft $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ besitzt.

(1 Punkt)

Aufgabe 4

Für $n \geq 1$ sei $f_n(x) := \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}, x \geq 0$. Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) auf $[0, \infty)$ gleichmässig gegen 0 konvergiert, aber

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = 1.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 5

Man berechne Real- und Imaginärteil von $(1+i)^{2011}$.

(1 Punkt)

III. Differenzialgleichungen

Aufgabe 6 (Kersting)

Von einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei bekannt, dass für den Gradienten ∇f

$$\langle \nabla f(x), x \rangle \neq 0$$

für $|x| = 1$ gilt. Folgern Sie, dass f einen Extremalpunkt besitzt.

(2 Punkte)

Lösungsskizze: —

IV. Lineare Algebra und Geometrie

Aufgabe 7

Wir betrachten die 4 Quadrate nach außen über den Seiten eines Parallelogramms. Zeigen Sie, dass deren Mittelpunkte ein Quadrat bilden.

(2 Punkte)

Aufgabe 8

Bestimmen Sie (besser nicht durch Rechnung, sondern durch Ermittlung von Rang und Kern sowie geschicktes Raten) für die reelle $n \times n$–Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

a) alle Eigenwerte (mit Angabe der Vielfachheit) und zugehörige Eigenvektoren,
b) ebenso alle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren für die Matrix $M + kE$, wo E die $n \times n$–Einheitsmatrix bezeichnet und k beliebig reell ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 9

Durch $x \to Ax, A \in SO(4)$, sei eine Bewegung im Euklidischen 4−dimensionalen Raum gegeben, die die Einheitssphäre $S^3 = \{x :| x |= 1\}$ auf sich abbildet. Welche Fixpunktmengen können in S^3 auftreten?

(2 Punkte)

Aufgabe 10

Sei K ein endlicher Körper. Finden Sie ein nicht-konstantes Polynom $P \in K[X]$, welches keine Nullstelle in K besitzt.

(2 Punkte)

V. Stochastik

Aufgabe 11

Wir betrachten eine Nordostirrfahrt (X_n, Y_n) auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, bei der jeder Schritt unabhängig von der Vorgeschichte mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ nach Osten (d.h. zu einer Erhöhung der

x-Koordinate um 1) und mit Wahrscheinlichkeit 3/4 nach Norden (d.h. zu einer Erhöhung der y-Koordinate um 1) führt. Der Startpunkt sei $(4, 5)$. Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Schritten, bis die Differenz der Nord- und Ostkoordinate erstmals den Betrag 2 (also den Wert 2 oder -2) erreicht.

(2 Punkte)

Aufgabe 12

Von einer Verteilung ρ auf $\mathbb{R}$ sei nur bekannt, dass sie eine Dichte besitzt. Es geht darum, den Median ν von ρ zu schätzen; unsere Annahme garantiert, dass ν diejeneige (durch ρ eindeutig bestimme) Zahl ist, die die Bedingung $\rho\Big((-\infty, \nu)\Big) = \rho\Big((\nu, \infty)\Big) = 1/2$ erfüllt.
Es seien $X_1, \ldots, X_{10}$ unabhängige Zufallsvariable mit Verteilung ρ.
(i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eines der X_i kleiner ausfällt als ν.
(ii) Es sei $X_{(2)}$ das zweitkleinste und $X_{(9)}$ das zweitgrößte der X_i. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält das Intervall $[X_{(2)}, X_{(9)}]$ die Zahl ν?

(2 Punkte)

Aufgabe 13

Ich befinde mich in einer Gruppe von n Personen. Die Gruppe wird in zwei Untergruppen A und B eingeteilt, dabei gelangt jeder unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit p in Gruppe A und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ in Gruppe B. Sei X die Anzahl der Personen in der Gruppe, in der auch ich mich befinde. Bestimmen Sie $\mathbf{E}(X)$.

(2 Punkte)

B. Vertiefungsgebiete

I. Algebra

Aufgabe 14

G sei eine Gruppe der Ordnung 65 . Man beweise:
a) (0,5 Punkte) G besitzt zyklische Untergruppen S und U der Ordnungen 13 bzw. 5 .
b) (0,5 Punkte) S ist eindeutig bestimmt und Normalteiler in G .
c) (1 Punkt) U operiert durch Konjugation auf S , und zwar trivial.
d) (1 Punkt) G ist eine zyklische Gruppe.

(3 Punkte)

Aufgabe 15

Man bestimme den Körpergrad

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{7}) : \mathbb{Q}].$$

(2 Punkte)

II. Diskrete Mathematik

Aufgabe 16

Zeigen Sie, dass ein ebener, zusammenhängender, endlicher Graph, bei dem von allen Ecken eine gerade Anzahl von Kanten ausgehen, eine Landkarte definiert, die mit zwei Farben zulässig gefärbt werden kann.

(2 Punkte)

Aufgabe 17

Bei einer Kantenfärbung eines Graphen $G = (V, E)$ wird jede Kante so gefärbt, dass je zwei Kanten, die einen Endknoten gemeinsam haben, unterschiedliche Farbe haben. Die Kantenfärbungszahl $\chi'(G)$ bezeichnet die minimale Anzahl von Farben, die für eine Kantenfärbung von G benötigt werden.

(a) Bestimmen Sie $\chi'(C_n)$ für den Fall eines Kreises C_n mit n Knoten ($n \geq 3$).

(b) Zeigen Sie, dass für jeden Graphen G gilt $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$, wobei $\Delta(G)$ der maximale Knotengrad in G ist.

(c) Sei $G = (S \cup T, E)$ ein bipartiter Graph, bei dem jeder Knoten den Grad d hat („d-regulär“). Zeigen Sie mit dem Heiratssatz, dass $\chi'(G) = d$.

(4 Punkte)

III. Geometrie und Topologie

Aufgabe 18

$\mathbb{P}$ sei eine (axiomatisch gegebene) projektive Ebene und besitze eine Gerade g , die mit genau 5 Punkten inzidiert. Beweisen Sie: Jeder Punkt in $\mathbb{P}$ inzidiert mit 5 Geraden, und $\mathbb{P}$ enthält insgesamt 21 Punkte.

(3 Punkte)

Aufgabe 19

Man zeige: Auf der Poincaréschen oberen Halbebene ist die Menge

$$\{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\,,\ a < x < b\,,\ y > c\}$$

(hyperbolisch) konvex, die Menge $\{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\,,\ a < x < b\,,\ y < c\}$ nicht konvex.

(1 Punkt)

Aufgabe 20

Formulieren Sie die Sätze von Pascal und Brianchon für Kegelschnitte und erläutern Sie, in wiefern diese dual zueinander sind.

(2 Punkte)

IV. Zahlentheorie

Aufgabe 21

Beweisen Sie, dass mit Ausnahme von s_1 und s_3 die Zahlen

$$s_n \ := \ 1! + 2! + \ldots + n!$$

keine Quadratzahlen sind. (Hinweis: $\bmod 5$ rechnen!)

(2 Punkte)

Aufgabe 22

Zeigen Sie, dass die Zahl $n = 1729$ $(= 7 \cdot 13 \cdot 19)$ eine Carmichael-Zahl ist, d.h. $a^{n-1} \equiv 1 \bmod n$ erfüllt für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a, n) = 1$.

(2 Punkte)

C. Didaktik (nur für Kandidaten nach neuer Ordnung)

I. Messen

Aufgabe 23

Die Leitidee des Messens durchzieht die gesamt gymnasiale Schulzeit.
Illustrieren Sie diese Behauptung, indem Sie Fragestellungen aus der 5./6. Jahrgangsstufe und aus der Oberstufe vergleichen. Arbeiten Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten des Messens dabei heraus!

(2 Punkte)

II. Zahlenfolgen

Aufgabe 24

Eine Zahlenfolge ist definiert durch $a_1 = 30, a_{n+1} = a_n + 10 - a_n/10$.
a) Erstellen Sie eine Aufgabe, die Schüler zu Beginn der Oberstufe motivieren könnte, diese Zahlenfolge auf ihren Grenzwert zu untersuchen, obwohl sie den Begriff Grenzwert noch nicht kennen. Welche Erkenntnisse können die Schüler bei der Bearbeitung gewinnen.
b) Welche Möglichkeiten für sinnvollen Computereinsatz gibt es bei dieser Aufgabe. Erläutern Sie dabei auch Gefahren des Computereinsatzes beim Thema Folgen.
c) Welche Möglichkeiten gibt es, den Grenzwert der o.g. Folge in der Schule exakt zu bestimmen und welche Vorstellungen zu Folge und Grenzwert sind dabei relevant? Erläutern Sie, welche möglichen Fehlvorstellungen bedacht werden müssen .

(3 Punkte)

III. Kombinatorik

Aufgabe 25

In mehreren Lehrplänen der 90er Jahre fand sich die Empfehlung: *Nur so viel Kombinatorik wie nötig.*
a) Erläutern Sie, was gegen viel Kombinatorik spricht.
b) Wie viel Kombinatorik ist für andere Ziele des Mathematikunterrichts nötig?
c) Nennen Sie Aspekte, auf die man bei der Behandlung der Kombinatorik achten sollte.

(3 Punkte)

IV. Üben

Aufgabe 26

Heinrich Winter unterscheidet operatives, produktives, problemorientiertes und anwendungsorientiertes Üben.
a) Erläutern Sie die Bedeutung von drei dieser Übungsformen und geben Sie jeweils ein illustratives Beispiel.
b) Es heißt, Lehrer sollten gerade auch für Übungsphasen in der Lage sein, Aufgaben zu variieren. Warum ist das so und was bedeutet es bei der folgenden Aufgabe: *Bilde den Mittelwert von 1,2,3,4,5,6,7.*

(2 Punkte)