Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik

Team Challenge

Teamname:

Aufgabe 1.

Für die Rundfahrt mit einem Boot auf dem Main gibt es fünf Plätze, die mit den Sitznummer 1, 2, 3, 4 und 5 nummeriert sind. Es kommen fünf Gäste mit den passenden Platznummern, die auch in der Reihenfolge ihrer Platznummer erscheinen. Da der erste Gast betrunken ist, setzt er sich zufällig auf einen der 5 Sitzplätze, wobei jede Sitzplatzwahl für ihn gleichwahrscheinlich ist. Alle anderen Gäste verfahren nun wie folgt: Ist ihr Platz frei, dann werden sie diesen auch wählen. Ist er jedoch nicht frei, so wählen Sie zufällig einen der noch freien Plätze. Dabei ist dann jeder der noch verbliebenen Plätze gleichwahrscheinlich.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass der fünfte Gast auf seinem Platz mit der Nummer 5 sitzt?

b) Wenn das Boot nun 100 Sitzplätze hat und 100 Gäste kommen. In der Situation wie zuvor, wie wahrscheinlich ist es, dass der Gast mit Sitznummer 100 auch auf diesem Platz sitzen kann?

c) Wenn es n Sitzplätze und n Gäste $(n > 1)$ gibt, wie wahrscheinlich ist es dann, dass der Gast mit Sitznummer n in dem obigen Szenario auch auf seinen Sitzplatz kann?

Lösung:
Für $a)$ gelöst gibt es 3 Punkte; Für $a)$ und $b)$ gelöst gibt es 7 Punkte; Wer alle Aufgaben gelöst hat, erhält 10 Punkte.

Die Antwort für jede der Fragen ist $\frac{1}{2}$:
Wir lösen Aufgabe c), da a) und b) offensichtlich Spezialfälle sind.

Lösungsvariante 1:
Bezeichne p_n die gesuchte Wahrscheinlicheit bei n Sitzplätzen und n Gästen. Offenbar gilt $p_1 = 1$

und $p_2 = 1/2$ (und auch leicht zu sehen $p_3 = 1/2$). Im oFlgenden sei $n \geq 3$. Wir unterscheiden (der Stochastiker sagt „bedingen darauf"), wo der betrunkene erste Gast Platz nimmt. Nimmt er auf Sitz 1 platz, so sitzen alle Gäste auf ihren vorgesehenen Plätzen und somit sitzt auch der n-te Gast sicher auf seinem Platz. Dies passiert mit Wahrscheinlichkeit $1/n$. Nimmt der betrunkene erste Gast auf Sitz n platz, so ist es unmöglich, dass auch Gast n auf Platz n zu sitzen kommt. Dies passiert auch mit Wahrscheinlichkeit $1/n$. Ebenso mit Wahrscheinlichkeit $1/n$ setzt sich der betrunkene erste Gast auf Platz j für $2 \leq j \leq n-1$. In diesem Falle setzen sich die Gäste $2, 3, \dots, j-1$ auf ihre vorgesehenen Plätze. Gast j findet seinen Platz besetzt vor und spielt nun für die $n-j+1$ noch offenen Plätze $1, j+1, j+2, \dots, n$ die Rolle des betrunkenen Gasts. Gegeben, dass der betrunkene erste Gast sich auf Platz j setzt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit also p_{n-j+1} für alle $n \geq 3$ und $2 \leq j \leq n-1$. Damit ergibt sich folgende rekursive Beziehung:

$$p_n = \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot 0 + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n-1} p_{n-j+1}. \tag{1}$$

Derartige rekursive Beziehungen kann man mit einem kleinen Trick auswerten: Wir schreiben die Gleichung auch für $n+1$ auf:

$$p_{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot 1 + \frac{1}{n+1} \cdot 0 + \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^{n} p_{n+1-j+1}. \tag{2}$$

Nun multiplizieren wir Gleichung (1) links und rechts mit n, Gleichung (2) links und rechts mit $n+1$. Dies liefert

$$np_n = 1 + \sum_{j=2}^{n-1} p_{n-j+1}, \tag{3}$$

$$(n+1)p_{n+1} = 1 + \sum_{j=2}^{n} p_{n-j+2}. \tag{4}$$

Nun ziehen wir die linken und die rechten Seiten in (3) bez. (4) jeweils voneinander ab. Dies lässt die etwas lästige Summe verschwinden und liefert

$$np_n - (n+1)p_{n+1} = -p_n, \tag{5}$$

also $p_{n+1} = p_n$ für alle $n \geq 3$. Wegen $p_3 = 1/2$ also $p_n = 1/2$ für alle $n \geq 2$.

Lösungsvariante 2:
Sollte man durch Ausrechnen zu Fuß von kleinen Werten $p_2 = p_3 = 1/2$ auf die Idee kommen, dass $p_n = 1/2$ für alle $n \geq 2$ gelten könnte, so kann man das durch vollständige Induktion ganz einfach beweisen, indem man für den Induktionsschritt $n-1 \to n$ die Induktionsannahme $p_2 = p_3 = \cdots = p_{n-1} = 1/2$ triff. Einsetzen in (1) in der Lösungsvariante 1 liefert dann direkt $p_n = 1/2$, also den Induktionsschritt.

Lösungsvariante 3:
Jeder Ausgang lässt sich eindeutig durch eine Kette $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ beschreiben, die so zu verstehen ist, dass für jedes $1 \leq j \leq k-1$ Gast i_j auf Platz i_{j+1} sitzt, Gast i_k auf Platz 1 sitzt und alle anderen Gäste auf ihren eigenen Plätzen sitzen. Sei nun

$$A = \{(i_1, \dots, i_k) | 1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k < n\}$$

und

$$B = \{(1_i, \dots, i_k) | 1 = i_1 < i_2 < \dots < i_k = n\}.$$

A entspricht den Ausgängen, in denen Gast n auf seinem eigenem Platz sitzt und B entspricht den Ausgängen, in denen Gast n nicht auf seinem eigenem Platz sitzt, da dieser von Gast i_{k-1} belegt ist. Wir zeigen nun $|A| = |B|$ in dem wir zueinander inverse Abbildungen $\phi : A \to B, \psi : B \to A$ zwischen den beiden Mengen angeben.

Sei $i = (i_1, \dots, i_k) \in A$ dann ist nach Definition $i_k < n$ und daher gilt $\phi(i) := (i_i, \dots, i_k, n) \in B$. Ist hingegen $j = (j_1, \dots, j_k) \in B$, so muss $k \geq 2$, da $j_k = n \neq 1 = j_1$. Daher ist $\psi(j) := (j_1, \dots, j_{k-1}) \in A$. Offensichtlich gilt $\psi(\phi(i)) = i$ für alle $i \in A$ und $\phi(\psi(j)) = j$ für alle $j \in B$. Damit gilt also $|A| = |B|$ und die Wahrscheinlichkeit, dass Gast n auf seinem eigenem Platz sitzt, ist $\frac{1}{2}$.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Team Challenge

Teamname:

Aufgabe 2.

In Kugelhausen steht ein Brunnen, bei dem das Wasser an einer Stelle A, die 4 Meter über dem Boden liegt, in waagerechter Richtung strömt. Danach nimmt der Wasserstrahl die Form einer nach unten geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt A an und trifft an einer Stelle S auf den Boden, die 1 Meter von dem unterhalb A gelegenen Punkt P des Bodens entfernt ist. Der Brunnen soll nun mit einer Kugel geschmückt werden, die an der Stelle P auf dem Boden aufliegt.

a) Geben Sie die Gleichung an, die den Verlauf des Wassers beschreibt.

b) Welche Größe darf der Kugelradius r maximal haben, damit der Wasserstrahl nicht auf die Kugel trifft? Die Dicke des Wasserstrahls soll dabei vernachlässigt werden.

Lösung:
a) 3 Punkte für das Polyom, das den Wasserstrahl beschreibt; b) 3 Punkte für die Kreisgleichung und 4 Punkte für die Lösung.

Lege ein Koordinatensystem so, dass der Punkt P in $(0,0)$ liegt.
a) Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte auf dem Wasserstrahl. Nach Vorraussetzung gibt es ein $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass $A = \{(x, f(x)) | x \in [0,1]\}$ gilt. Aus der Beschreibung der Kurve folgt

$$f(0) = 4,\ f'(0) = 0,\ f(1) = 0.$$

Damit ergeben sich die Gleichungen

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 4,\ 2a \cdot 0 + b = 0,\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0,$$

woraus $a = -4, b = 0, c = 4$ und daher $A = \{(x, 4(1 - x^2)) | x \in [0,1]\}$ folgt.
b) Sei $r > 0$ und $B_r \subset \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte auf dem Kugelrand. Da die Kugel den Radius

---

Für die Team Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Bearbeiten Sie in dieser Zeit möglichst alle Aufgaben. Geben Sie Ihren Lösungsweg mit an. Pro Aufgabe können Sie bis zu 10 Punkte erreichen.

r hat und auf dem Punkt $P = (0, 0)$ auf dem Boden aufliegt musss ihr Mittelpunkt in $(0, r)$ sein. Daher folgt

$$B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + (y - r)^2 = r^2\}.$$

Zunächst ist klar, dass $r \leq 2$ sein muss, da sonst die Wasseraustrittsstelle innerhalb der Kugel läge. Angenommen für $0 < r \leq 2$ gibt es ein $(x, y) \in A \cap B_r$ so gilt $y = 4(1 - x^2)$ wegen $(x, y) \in A$ und daher wegen $(x, y) \in B_r$ auch

$$\begin{aligned} (4(1 - x^2) - r)^2 + x^2 &= r^2 \\ \iff 16(1 - x^2)^2 - 8(1 - x^2) + r^2 + x^2 &= r^2 \\ \iff 16x^4 + (8r - 31)x^2 + 16 - 8r &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Substituiert man $z := x^2$ ergibt sich eine Quadratische Gleichung, und die pq-Formel liefert

$$z_{1,2} = \frac{31 - 8r \pm \sqrt{64r^2 + 16r - 63}}{32}.$$

Damit muss $64r^2 + 16r - 63 \geq 0$, da sonst die Wurzel nicht existiert. Erneut liefert die pq-Formel, dass für

$$r_{1,2} = -\frac{1}{8} \pm 1$$

gerade $64r_{1,2}^2 + 16r_{1,2} - 63 = 0$. Wir bemerken zudem, dass für $\frac{7}{8} \leq r \leq 2$ auch $31 - 8r > 0$ und daher zumindest ein $x \in [0, 1]$ existiert, dass die Gleichung (6) löst, nämlich

$$x = \sqrt{\frac{31 - 8r + \sqrt{64r^2 + 16r - 63}}{32}}.$$

Damit der Wasserstrahl nicht auf die Kugel trifft muss also $r < \frac{7}{8}$ sein.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

Institut für Mathematik

Team Challenge

Teamname:

Aufgabe 3.

Fünf intelligente Piraten P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 leben zusammen auf einem Schiff und haben 100 Goldmünzen erobert, die es nun zu verteilen gilt. Für die Verteilung gehen sie wie folgt vor:
P_1 gibt einen Vorschlag für die Verteilung der Münzen und anschließend wird für diesen Vorschlag abgestimmt. P_1 darf hierbei mit abstimmen.
Falls 50% oder mehr für die Verteilung stimmen, dann erhält jeder die Münzen wie vorgeschlagen. Sind jedoch weniger als 50% für den Vorschlag, so wird P_1 von Bord geworfen und P_2 darf einen neuen Vorschlag für die Verteilung der Münzen auf die noch übrig gebliebenen Piraten machen. Für P_2 gelten dann die gleichen Regeln wie zuvor für P_1. Muss P_2 von Bord, so geht das Vorschlagsrecht an P_3 usw.
Wie viele Goldmünzen kann P_1 maximal behalten, wenn alle anderen Piraten aus reinem Eigeninteresse handeln und ihren Gewinn maximieren wollen?

Lösung:
2 Punkte für die Idee hinten anzufangen; Anschließend 2 Punkte pro Argumentationsschritt (bis 8 Punkte).

Man muss dieses Problem von hinten aufrollen, um es gut verstehen zu können:

1) Wenn am Ende nur noch Piraten P_4 und P_5 übrig wären, kann P_4 sich alle 100 Münzen geben, da er von Pirat P_5 nicht überstimmt werden kann.

2) Ist P_3 an der Reihe, kann er sich für eine Goldmünze die Stimme von P_5 erkaufen, da P_5 nach Überlegung 1) sonst lehr ausgehen würde. P_3 kann sich selber also 99 Münzen einteilen.

3) Ebenso kann sich P_2 für eine Münze die Stimme von P_4 erkaufen, da P_4 nach Überlegung 2) sonst lehr ausgehen würde. P_3 und P_5 kann er dann ignorieren. P_2 kann sich also auch 99 Münzen geben.

Für die Team Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Bearbeiten Sie in dieser Zeit möglichst alle Aufgaben. Geben Sie Ihren Lösungsweg mit an. Pro Aufgabe können Sie bis zu 10 Punkte erreichen.

4) P_1 muss sich nun 2 Stimmen erkaufen, um nicht von Bord geworfen zu werden. P_3 und P_5 würden unter der Aufteilung von P_2 jedoch leer ausgehen nach Überlegung 3). P_1 kann also beide für jeweils 1 Münze überzeugen und die verbleibenden 98 selber behalten.

Main Math Challenge 2022

Goethe-Universität Frankfurt am Main

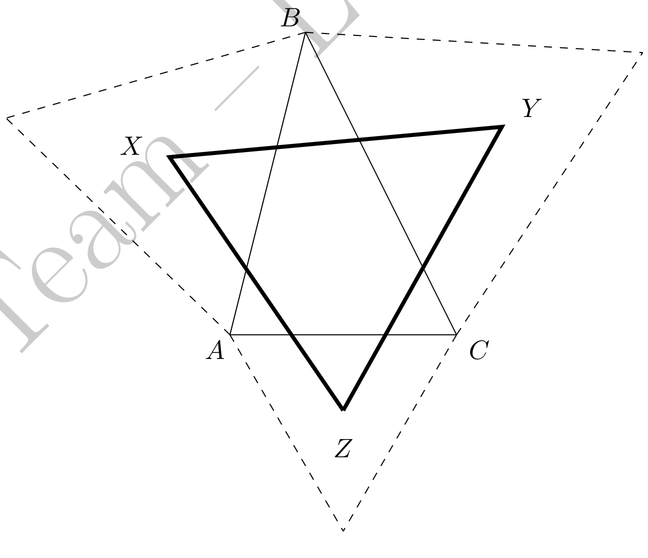
Institut für Mathematik

Team Challenge

Teamname:

Aufgabe 4.

Es sei ein Dreick mit Eckpunkten A, B und C gegeben. An die jeweiligen Seiten werden gleichseitige Dreiecke gezeichnet und wir bezeichnen die Mittelpunkte dieser mit X, Y und Z (siehe nicht detailgetreue Skizze unten). Zeigen Sie, dass das Dreieck mit den Eckpunkten X, Y und Z gleichseitig ist.



Lösung:
grobe Orientierung für die Wertung, falls einer dieser Wege gewählt wurde:
via alle Winkel gleich: Konstruktion der Kreise (3 Punkte), finden des gemeinsamen Schnittpunktes der Kreise (4 Punkte) und Schlußfolgerung (3 Punkte);

Für die Team Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Bearbeiten Sie in dieser Zeit möglichst alle Aufgaben. Geben Sie Ihren Lösungsweg mit an. Pro Aufgabe können Sie bis zu 10 Punkte erreichen.

via alle Seiten gleichlang: Passende Formulierung des Kosinussatz (3 Punkte), ersetzen der fehlenden Größen (4 Punkte) und Schlußfolgerung mit dem Sinussatz (3 Punkte).

Man zeichnet zunächst Kreise um die Mittelpunkte X, Y und Z, die wir im Folgenden wieder mit X, Y und Z bezeichnen. Da die zugehörigen Dreiecke gleichseitig sind, gehen diese Kreise genau durch die entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke. Ferner schneiden sich offensichtlich jeweils zwei der Kreise in einem weiteren Punkt.
Betrachte nun zunächst die Kreise X und Z mit dem Schnittpunkt A und den zweiten Schnittpunkt bezeichnen wir mit D. Sei ferner E der dritte Punkt des gleichseitigen Dreiecks an die Strecke AC, F der dritte Punkt des gleichseitigen Dreiecks an AB und, der Vollständigkeit halber, G der dritte Punkt des gleichseitigen Dreiecks an BC.
Dann ist $ADCE$ ein zyklisches Viereck und somit gilt $AEC + ADC = 180$Grad. Da ferner AEC einen Winkel von 60Grad hat, folgt $ADC = 120$Grad.
Analog ist auch $AFB + ADB = 180$Grad und somit $ADB = 120$Grad.
Da auch $AFB + AEC + BGC = 180$Grad ist, folgt $BGC + BDC = 180$Grad und insbesondere ist D auch auf dem Kreis Y — alle drei Kreise schneiden sich also im Punkt D und es gilt auch $BDC = 120$Grad.
nun ist AD als Verbindungsstrecke zwischen den Schnittpunkten der Kreise X und Z orthogonal auf XZ und analog gilt dies auch für die Stecke ZY zur Strecke DC. Seien I und J die Schnittpunkte zwischen AD und XZ bzw. respektiv ZY und DC, so gilt

$$ZID + IDJ + DJZ + JZI = 360\text{Grad},$$

da dabei $IDJ = ADC = 120$Grad gilt, $ZID = DJZ = 90$Grad ist, folgt $IZJ = 60$Grad, also $XZY = 60$Grad. Da dies nun analog auch für die anderen Winkel des Dreiecks XYZ folgt, folgt die Behauptung.

Alternative Lösung (analytisch):
Wir bezeichnen die Länge der AB mit c, AC mit b und BC mit a. Weiter bezeichnen wir die Länge der Strecke ZY mit x, XY mit z und XZ mit y.
Da ZA eine Winkelhalbierende darstellt, ist der Winkel zwischen ZAC genau 30Grad und genauso gilt dies auch für XAB. Nach dem Kosinussatz ist dann

$$y^2 = |ZA|^2+|XB|^2-2|ZA||XB|\cos(30^\circ+30^\circ+BAC) = |ZA|^2+|XB|^2-2|ZA||XB|\cos(60^\circ+BAC).$$

Nun beträgt $|ZA|$ genau $\frac{2}{3}$ der Höhe des Dreiecks mit Mittelpunkt Z und somit folgt

$$|ZA| = \frac{2}{3}\cdot \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}b}_{=\text{Höhe des gleichseitigen Dreiecks}} = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

und ebenso ist $|XB| = \frac{c}{\sqrt{3}}$. Es folgt also

$$3y^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos(60^\circ + BAC).$$

Dabei ist nach den Kosinusadditionstheoremen

$$\cos(BAC + 60^\circ) = \cos(BAC)\cos(60^\circ) - \sin(BAC)\sin(60^\circ) = \frac{\cos(BAC)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(BAC).$$

Es folgt wieder mit dem Kosinussatz

$$3y^2 = c^2 + b^2 - cb\cos(BAC) + \sqrt{3}\sin(BAC) = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \sqrt{3}cb\sin(BAC).$$

Nach dem Sinussatz ist nun $bc\sin(BAC) = 2F$, wobei F die Fläche des Dreiecks ABC bezeichne. Also gilt

$$3y^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}F.$$

Mit der gleichen Rechnung folgt nun $y = x = z$ wie behauptet.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben.