KLAUSUR
für das Staatsexamen Mathematik
L2/L5

19. März 2015 von 9-13 Uhr

Bitte nehmen Sie für jede Aufgabe gesonderte Blätter. Schreiben Sie Ihren Namen leserlich auf jedes benutzte Blatt, nummerieren Sie die Blätter sinnvoll, und lassen Sie an beiden Seiten Ränder zum Abheften bzw. für die Korrektur. Bedenken Sie bitte, dass Ihre Darstellungs- und Ausdrucksweise mitbewertet wird. Längere Texte sind nicht unbedingt besser!

Es werden nur zwei c)-Teile gewertet; bearbeiten Sie nicht unnötig mehr als zwei.

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, Geodreieck, ein handbeschriebenes DIN A4-Blatt.

Aufgabe 1 (Stochastik)

Eine Schokoladenfirma wirbt damit, dass sich in jedem 5. Überraschungsei eine Figur befindet.

a) Für einen Kindergeburtstag werden 15 Überraschungseier gekauft. Erklären Sie, welche Bedeutung in diesem Kontext der folgende Term hat und wie er zustande kommt:

$$\binom{15}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^{12}.$$

Berechnen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeit, dass in höchstens 13 Eiern keine Figur ist.

b) Bei der Produktion der Überraschungseier treten nur zwei Fehler auf. F1: beschädigte Schokoladenhülle, F2: fehlerhafte Verpakung. F1 und F2 treten unabhängig voneinander auf. Ein Ei ist einwandfrei, wenn es keinen der beiden Fehler aufweist, was erfahrungsgemäß bei 85% der Eier der Fall ist. Erfahrungsgemäß sind 8% der Schokoladenhüllen beschädigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt der Fehler F2 auf?

c) Um die Wirkung einer Werbekampagne auf das Kaufverhalten zu untersuchen, beauftragt die Schokoladenfirma ein Marktforschungsinstitut. Von besonderem Interesse ist, ob die Tatsache, dass eine Person die Werbung gesehen hat, tatsächlich einen Einfluss auf die Vorliebe der Person für Überraschungseier hat. Umfragen ergeben: 40% aller Befragten haben im letzten Monat ein Überraschungsei gekauft. 33% der Befragten gaben an, die Werbung gesehen zu haben. 36% der Befragten haben weder die Werbung gesehen noch im letzten Monat ein Überraschungsei gegessen.

Wie unterscheiden sich die Wahrscheinlichkeiten, ein Ei zu kaufen, für Personen, die die Werbung gesehen bzw. nicht gesehen haben? Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Käufer eines Eies die Werbung gesehen?

Aufgabe 2 (Elementarmathematik I)

a) Jede natürliche Zahl n lässt sich nicht nur im Dezimalsystem als $(n)_{10}$ mit Ziffern 0, 1, 2, … , 8, 9 schreiben, sondern auch im Achtersystem als

$$(n)_8 = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_8 := a_m \cdot 8^m + a_{m-1} \cdot 8^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot 8 + a_0$$

mit Ziffern $a_k \in \{0,1,\dots,6,7\}$.

Rechnen Sie die (im Dezimalsystem geschriebenen) Zahlen $(70)_{10}$ und $(513)_{10}$ ins Achtersystem um und die im Achtersystem geschriebenen Zahlen $(35)_8$ und $(1111)_8$ ins Dezimalsystem.

b) Lösen Sie die Kongruenz $59\,\mathrm{x} \equiv 1 \bmod 8$, indem Sie ganzzahlige Lösungen x, y der Gleichung $59\mathrm{x} + 8\mathrm{y} = 1$ ermitteln.

c) Die natürliche Zahl n sei wie in Teil a) im Achtersystem geschrieben.

Beweisen Sie: n ist durch 7 teilbar genau dann, wenn die Quersumme $\sum_{k=0}^{m} a_k$ durch 7 teilbar ist.

Beweisen Sie anschließend: n ist durch 9 teilbar genau dann, wenn die alternierende Quersumme $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_k$ durch 9 teilbar ist.

Aufgabe 3 (Elementarmathematik II)

a) Ein Ehepaar schließt eine gemeinsame Rentenversicherung ab. In die Versicherung soll bis heute 30 Jahre lang am Anfang jedes Monats ein konstanter Beitrag K eingezahlt werden. Es wird mit einem monatlichen Zins von 0,25% gerechnet. Wie hoch muss K sein, wenn die einmalige Auszahlung in 30 Jahren 300.000 EUR betragen soll? Geben Sie unter Benutzung der Formel für die geometrische Reihe eine Formel für K an.

b) Statt einer einmaligen Auszahlung von 300.000 EUR soll in 30 Jahren eine monatliche Rente beginnen. Dabei bekommt jede Person solange sie lebt am Anfang jedes Monats eine konstante Rente M. Wie hoch ist M, wenn die Ehefrau eine Lebenserwartung von weiteren 20 Jahren (also 50 Jahre von heute an gerechnet) und der Ehemann eine Lebenserwartung von weiteren 15 Jahren hat? Der monatliche Zins beträgt weiterhin 0,25%. Geben Sie wieder unter Benutzung der Formel für die geometrische Reihe eine Formel für M an. Berechnen Sie anschließend K mit dem Taschenrechner.

c) Nehmen Sie an, dass die Rentenzahlungen in b) nicht monatlich sondern jährlich stattfinden (jeweils am Anfang des Jahres) und dass mit einem jährlichen Zins von 3% gerechnet wird. Ist die Summe der Auszahlungen im Vergleich zu b) höher oder niedriger? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch. Berechnen Sie anschließend M mit dem Taschenrechner.

Aufgabe 4 (Komplexe Zahlen)

Wir bezeichnen mit ζ die dritte Einheitswurzel, also die komplexe Zahl $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. Beachten Sie, dass ζ das Bild von 1 unter der Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ im Bogenmaß (also 120° im Gradmaß) ist. Daher gilt $\zeta^3 = 1$. Weiter gilt $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$. (Diese beiden Bedingungen sind vor allem für Aufgabenteil c) hilfreich.)

a) Seien a, z komplexe Zahlen. Zeigen Sie, daß die komplexe Zahl $2a - z$ das Ergebnis der Punktspiegelung von z an a beschreibt. Bestimmen Sie weiter, auf welche komplexe Zahl z durch Drehung um den Punkt a um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ abgebildet wird.

b) Seien a_1, a_2, a_3, a_4 vier komplexe Zahlen. Welche Bedingungen (d.h. welche Gleichung) müssen diese erfüllen, so daß jede komplexe Zahl z nach Punktspiegelung der Reihe nach an a_1, a_2, a_3, a_4 wieder auf sich selbst abgebildet wird? Was bedeutet die Bedingung geometrisch?

c) Seien a_1, a_2, a_3 drei komplexe Zahlen. Welche Bedingungen (d.h. welche Gleichung) müssen diese erfüllen, so daß jede komplexe Zahl z nach Drehung um jeweils den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ nacheinander um die Punkte a_1, a_2, a_3 wieder auf sich selbst abgebildet wird? Was bedeutet die Bedingung geometrisch?

Aufgabe 5 (Didaktik)

a) Nennen und erläutern Sie die drei Beweiskategorien von Müller & Wittmann an jeweils einem selbstgewählten Beispiel.

b) Formulieren Sie den Satz des Pythagoras und beweisen Sie ihn auf zwei substantiell verschiedene Arten.

c) Skizzieren Sie kurz die Bedeutung des Beweisens in der Fachwissenschaft.